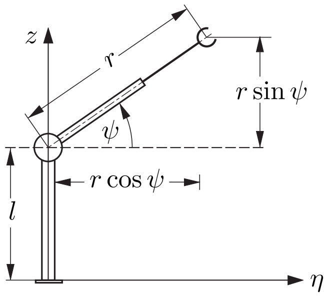
Tutorium

Aufgabe 9

Aufstellen eines Ortsvektors:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z \tag{1}$$

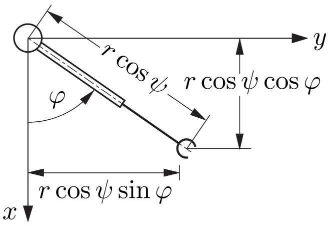
$$x(t) = r\cos\psi\cos\varphi \tag{2}$$
$$y(t) = r\cos\psi\sin\varphi \tag{3}$$
$$z(t) = l + r\sin\psi \tag{4}$$



gegeben:

$$\boxed{r(t) = l(2+\sin\Omega t)} \quad \text{(I)}$$

$$\dot\varphi = \Omega = konst \tag{5}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega \Rightarrow \tag{6}$$
$$\int_0^{\varphi(t)} d\tilde\varphi = \int_0^t \Omega d\tilde t \tag{7}$$
$$\varphi(t) = \Omega t \tag{8}$$



$$\dot\psi = \theta = konst \tag{9}$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \theta \ \Rightarrow \int_{\psi_0}^{\psi(t)} d\tilde\psi = \int_0^t \theta d\tilde t \tag{10}$$
$$\Rightarrow \ \psi(t) - \psi_0 = \theta t \tag{11}$$
$$\boxed{\psi(t) = \theta t + \psi_0} \quad \text{(II)}$$

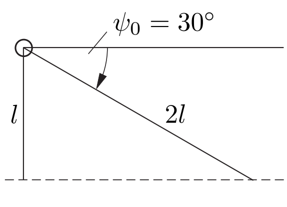
Bestimmung von ψ_0:

$$z(0) \overset{!}{=} 0 \quad z(t) = l + r(t)\sin\psi(t) \tag{12}$$

$$t = 0 \ \Rightarrow \quad 0 = l + \big(2l + l\sin\Omega\phi\big)\sin\psi(0) \tag{13}$$
$$0 = l + 2l\sin\psi_0 \ \Big|_{:l} \tag{14}$$
$$0 = 1 + 2\sin\psi_0 \tag{15}$$

$$-1 = 2\sin\psi_0 \quad \Big|_{:2} \tag{16}$$
$$\sin\psi_0 = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \quad \psi_0 = \arcsin\Big(-\frac{1}{2}\Big) \tag{17}$$

$$\boxed{\psi_0 = -\frac{\pi}{6}} \tag{18}$$
$$\psi(t) = \Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big) \tag{19}$$



alle bekannten Größen einsetzen

$$x(t) = r(t)\cos\psi(t)\cos\varphi(t) \tag{20}$$
$$= l(2+\sin\Omega t)\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\cos\Omega t \tag{21}$$

$$y(t) = l(2+\sin\Omega t)\cos\psi(t)\sin\varphi(t) \tag{22}$$
$$= l(2+\sin\Omega t)\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\sin\Omega t \tag{23}$$

$$z(t) = l + r\sin\psi\,(t) \tag{24}$$
$$= l + l\big(2+\sin\Omega t)\sin\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big) \tag{25}$$

Geschwindigkeitsvektor:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad \underline{v} = \dot x\underline{e}_x + \dot y\underline{e}_y + \dot z\underline{e}_z \tag{26}$$

$$\dot x(t) = \Big[l(2+\sin\Omega t)\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\cos\Omega t\Big]^\bullet \tag{27}$$
$$= l\Big[(2+\sin\Omega t)^\bullet\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\cos\Omega t + \tag{28}$$
$$(2+\sin\Omega t)\Big[\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\Big]^\bullet\cos\Omega t + \tag{29}$$
$$(2+\sin\Omega t)\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\big(\cos\Omega t\big)^\bullet\Big] \tag{30}$$
$$= l\Big[\Omega\cos\Omega t\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\cos\Omega t + \tag{31}$$
$$(2+\sin\Omega t)\Big(-\sin\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\theta\Big)\cos\Omega t + \tag{32}$$
$$(2+\sin\Omega t)\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\big(-\sin\Omega t\big)\Omega\Big] \tag{33}$$

$x(t)$ und $y(t)$ unterscheiden sich nur im letzten Term, anstatt $\cos\Omega t$ steht $\sin t$, somit kann man $\dot y(t)$ gleich schreiben.

$$\dot y(t) = l\Big[\Omega\cos\Omega t\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\sin\Omega t - \tag{34}$$
$$(2+\sin\Omega t)\theta\sin\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\sin\Omega t + \tag{35}$$
$$(2+\sin\Omega t)\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\Omega\cos\Omega t\Big] \tag{36}$$

(beachte Vorzeichen beim Ableiten)

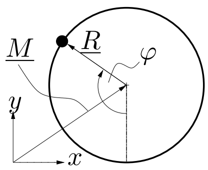
$$\dot z(t) = l\Big[(2+\sin\Omega t)^\bullet\sin\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big) + \tag{37}$$
$$(2+\sin\Omega t)\Big(\sin\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\Big)^\bullet\Big] \tag{38}$$
$$= l\Big[\Omega\cos\Omega t\sin\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big) + \tag{39}$$
$$(2+\sin\Omega t)\theta\cos\Big(\theta t - \frac{\pi}{6}\Big)\Big] \tag{40}$$

Aufgabe 11

$\underline{M}$ sei der Ortsvektor des Radmittelpunktes. Wenn das Rad sich um den Winkel φ gedreht hat, hat es dabei den Weg $R\varphi$ zurückgelegt (die Länge des entsprecheden Kreisbogensegmentes am Radumfang). Die Höhe des Mittelpunktes verändert sich nicht. x_M und y_M seinen die Koordinaten des Mittelpunktes, dann gilt:

$$x_M(t) = R\varphi(t)$$
$$y_M(t) = R$$

Die Koordinaten x_R und y_R des Vektors $\underline{R}$, der vom Mittelpunkt des Rades zum Punkt Titus weist, können der Skizze entnommen werden:



$$x_R(t) = -R\sin\varphi(t)$$
$$y_R(t) = -R\cos\varphi(t)$$

Der Drehwinkel $\varphi(t)$ ergibt sich aus der Angabe $\frac{d}{dt}\varphi(t) = \omega =$ konst durch Integration. Die Integrationskonstante φ_0 ist Null, wie man der Skizze zur Aufgabenstellung entnehmen kann.

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega d\tilde{t} + \varphi_0 = \omega t$$

Die Koordinaten des Ortsvektors zum Punkt Titus ergeben sich durch Addition von $\underline{M}$ und $\underline{R}$:

$$\begin{bmatrix} x_T(t) \\ y_T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_R(t) \\ y_R(t) \end{bmatrix}$$
$$= R\begin{bmatrix} \varphi(t) - \sin\varphi(t) \\ 1 - \cos\varphi(t) \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} \omega t - \sin\omega t \\ 1 - \cos\omega t \end{bmatrix}$$

Die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors ergeben sich daraus durch Ableiten nach der Zeit:

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_T(t) \\ \dot{y}_T(t) \end{bmatrix} = R\omega\begin{bmatrix} 1 - \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{bmatrix}$$

Die Koordinaten des Beschleunigungsvektors ergeben sich ebenso durch Ableiten:

$$\begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{bmatrix} = R\omega^2\begin{bmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \end{bmatrix}$$

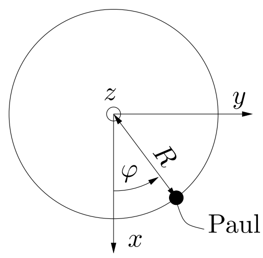
Hausaufgaben

Aufgabe 10

Zunächst soll der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten bestimmt werden: Die z-Koordinate kann direkt aus der Aufgabenstellung abgeschrieben werden, wenn man $\varphi(t) = \omega t$ in die Beziehung für z einsetzt:

$$z(t) = l_0 e^{k\omega t} \; .$$

Die x- und y-Koordinaten können aus der nebenstehenden Skizze abgelesen werden: (Die Skizze stellt die Draufsicht auf das Rohr bzw. die Bahn des Punktes Paul dar.)



$$x(t) = R\cos\varphi(t) = R\cos\omega t \; ,$$
$$y(t) = R\sin\varphi(t) = R\sin\omega t \; .$$

Damit kann der Ortsvektor $\underline{r}$ wie folgt als Linearkombination der kartesischen Basis $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ geschrieben werden:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z$$
$$= \underline{e}_x R\cos\omega t + \underline{e}_y R\sin\omega t + \underline{e}_z l_0 e^{k\omega t} \; . \tag{41}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes wird durch Ableiten des Ortsvektors nach der Zeit bestimmt. (Durch Ableiten seiner Koordinaten zur zeitlich nicht veränderlichen Basis $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ und $\underline{e}_z$.)

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{e}_x + \dot{y}(t)\underline{e}_y + \dot{z}(t)\underline{e}_z \tag{42}$$
$$= \underline{e}_x(-R\omega\sin\omega t) + \underline{e}_y R\omega\cos\omega t + \underline{e}_z l_0 k\omega e^{k\omega t} \; . \tag{43}$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{x}(t)\underline{e}_x + \ddot{y}(t)\underline{e}_y + \ddot{z}(t)\underline{e}_z \tag{44}$$
$$= \underline{e}_x(-R\omega^2\cos\omega t) + \ldots$$
$$+ \underline{e}_y(-R\omega^2\sin\omega t) + \ldots \tag{45}$$
$$+ \underline{e}_z l_0 k^2\omega^2 e^{k\omega t} \; .$$

Nun sollen Geschwindigkeit und Beschleunigung zum Zeitpunkt des Verlassens des Zylinders ermittelt werden. Dazu muß der entsprechende Zeitpunkt t_e bestimmt werden. Das ist der Zeitpunkt, an dem der Punkt die Höhe (=z-Koordinate) H erreicht:

$$z(t_e) = H = l_0 e^{k\omega t_e}$$
$$\hookrightarrow t_e = \frac{1}{k\omega}\ln\frac{H}{l_0} \; .$$

Wird t_e in die Gleichungen (43) und (45) eingesetzt, so ergeben sich als Lösung der Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_e$ und der Beschleunigungsvektor $\underline{a}_e$ beim Verlassen des Rohres:

$$\begin{aligned}\underline{v}_e &= -R\omega \sin\left(\frac{1}{k}\ln\frac{H}{l_0}\right)\underline{e}_x + \dots \\ &+ R\omega\cos\left(\frac{1}{k}\ln\frac{H}{l_0}\right)\underline{e}_y + \dots \\ &+ k\omega H\underline{e}_z\ ,\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\underline{a}_e &= -R\omega^2 \cos\left(\frac{1}{k}\ln\frac{H}{l_0}\right)\underline{e}_x + \dots \\ &- R\omega^2\sin\left(\frac{1}{k}\ln\frac{H}{l_0}\right)\underline{e}_y + \dots \\ &+ k^2\omega^2 H\underline{e}_z\ .\end{aligned} \tag{47}$$

Aufgabe 19

(a) Der Orstvektor lässt sich darstellen mit Vektoren $\underline{e}_r$ und $\underline{e}_\varphi$ entlang der Kanten der Scheibe.

$$\underline{r} = l\underline{e}_r + v_0 t\underline{e}_\varphi \tag{48}$$

$$\text{mit } \underline{e}_r = \cos(\omega t)\underline{e}_x + \sin(\omega t)\underline{e}_y \tag{49}$$

$$\underline{e}_\varphi = -\sin(\omega t)\underline{e}_x + \cos(\omega t)\underline{e}_y \tag{50}$$

Ausgedrückt in der kartesischen Basis ergibt sich also

$$\underline{r} = (l\cos(\omega t) - v_0 t\sin(\omega t))\underline{e}_x + (l\sin(\omega t) + v_0 t\cos(\omega t))\underline{e}_y \tag{51}$$

Dies abgeleitet nach der Zeit ergibt:

$$\begin{aligned}\underline{v} = \dot{\vec{r}} = &\Big\{ - (l\omega + v_0)\sin(\omega t) - v_0 t\omega\cos(\omega t)\Big\}\underline{e}_x \cdots \\ \dots + &\Big\{(l\omega + v_0)\cos(\omega t) - v_0 t\omega\sin(\omega t)\Big\}\underline{e}_y\end{aligned} \tag{52}$$

(b) Der Abstand ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras bzw. aus der Norm des Ortvektors zu

$$s(t) = ||\underline{r}|| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{l^2 + v_0^2 t^2} \tag{53}$$

(c) Mit den Zahlenwerten ergibt sich für den Geschwindigkeitsvektor und seine Norm/seinen Betrag:

$$\underline{v} = \Big\{0 - 2\pi\text{m/s}\Big\}\underline{e}_x + \Big\{(4\pi + 1)\text{m/s} - 0\Big\}\underline{e}_y \tag{54}$$

$$= \Big(- 2\pi\underline{e}_x + (4\pi + 1)\underline{e}_y\Big)\text{m/s} \tag{55}$$

$$||\underline{v}|| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} \tag{56}$$

$$= \sqrt{(-2\pi)^2 + (4\pi + 1)^2}\text{m/s} \tag{57}$$

$$= \sqrt{20\pi^2 + 8\pi + 1}\text{m/s} \tag{58}$$