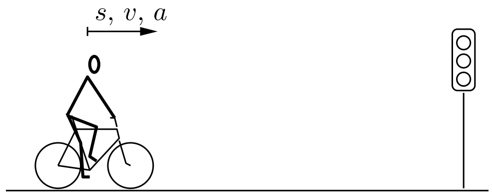
Tutorium

Aufgabe 1

In der folgenden Skizze ist die Situation zur Zeit t_0 eingetragen und die Koordinaten-Richtung (also die Richtung, in die s, v und a positiv zählen).



Definiere:

$$t_0 = 0,\, t_1 = 20\text{s},\, s_1 = 150\text{m}.$$

Gegeben sind:

$$\begin{aligned} s(0) &= 0,\, s(t_1) = s_1, \\ v(0) = v_0 &= 36\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{36000\text{m}}{3600\text{s}} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ a(t) &= a_1. \end{aligned}$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, umgekehrt ist der Zuwachs an Geschwindigkeit zwischen einer Anfangszeit 0 und einer Endzeit t gleich dem Integral der Beschleunigung in diesem Intervall. Es gilt also:

$$\begin{aligned} v(t) - v_0 &= \int_0^t a(\tilde{t})d\tilde{t} = \int_0^t a_1 d\tilde{t} = \Big[a_1\tilde{t}\Big]_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \\ v(t) &= a_1 t + v_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Wenn die Ortskoordinate zur Anfangszeit $s(0) = 0$ ist, gilt analog zum eben gesagten:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(\tilde{t})d\tilde{t} = \int_0^t (a_1\tilde{t} + v_0)d\tilde{t} = \Big[\frac{a_1}{2}\tilde{t}^2 + v_0\tilde{t}\Big]_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \\ &= \frac{a_1}{2}t^2 + v_0 t \end{aligned}$$

Wir haben jetzt je eine Gleichung für die Geschw. und den Ort zu jeder beliebigen Zeit t (im Intervall) darin ist jedoch die Größe a_1 immer noch unbekannt. Die gewinnen wir aus $s(t_1) = s_1$:

$$s_1 = s(t_1) = \frac{a_1}{2}t_1^2 + v_0 t_1 \quad \Big| \text{ nach } a_1 \text{ auflösen}$$

$$a_1 = \frac{2}{t_1^2}\Big(s_1 - v_0 t_1\Big) \quad \Big| \text{ Einsetzen der Zahlenwerte}$$

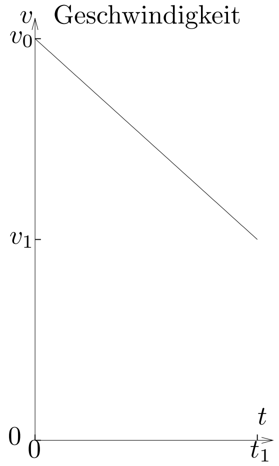
$$a_1 = -\frac{1}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

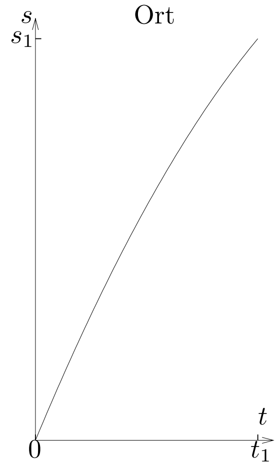
Die Beschleunigung ist negativ, der Radfahrer muß also bremsen.

Setzt man t_1 in Gleichung (1) ein, so erhält man die Geschwindigkeit, mit der der Radfahrer die Ampel passiert.

$$v(t_1) = a_1 t_1 + v_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der zeitliche Verlauf von Geschwindigkeit und Ort lassen sich in Diagrammen veranschaulichen:





Aufgabe 5

(a) Mit dem zweiten NEWTONschen Gesetz ergeben sich die zwei Komponenten der BewegungsDGL zu:

$$\ddot{y} = -g \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\ddot{x} = 0\,. \tag{3}$$

Integration mit den ABen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha$, $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = v_0\sin\alpha$ führt auf:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t \tag{4}$$

$$x(t) = v_0\cos\alpha t\,. \tag{5}$$

Damit der Motorradfahrer es schafft, muss gelten:

$$y(t_f) \stackrel{!}{=} h \tag{6}$$

$$x(t_f) \stackrel{!}{=} 2h \tag{7}$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{2h}{v_0\cos\alpha}\,. \tag{8}$$

Einsetzen in (4) liefert:

$$h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2h}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{2h}{v_0\cos\alpha} \tag{9}$$

$$\Rightarrow v_0 = \underline{\underline{2\sqrt{gh}}} \tag{10}$$

(b) Es gilt für die Beschleunigung:

$$a_R = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\,. \tag{11}$$

Integration liefert:

$$\int_0^{\sqrt{2}h} a_r\mathrm{d}s = \int_0^{v_0} v dv = \frac{1}{2}v_0^2\,. \tag{12}$$

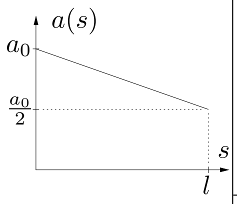
Schließlich ergibt sich a_R zu:

$$a_R = \frac{1}{2\sqrt{2}h}(2\sqrt{gh})^2 = \underline{\underline{\sqrt{2}g}}\,. \tag{13}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Gesucht ist die Geschwindigkeit an der Stelle $s = l$, d.h. $v(s = l) =: v_l$. Gegeben ist die Beschleunigung als Funktion des Wegs. Aus der Skizze liest man ab, dass a folgender Gleichung genügt: $a(s) = -\frac{a_0}{2l}s + a_0$.



$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}v \end{aligned}$$

Trennung der Variablen liefert:

$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}s$$

Einsetzen von $a(s) = -\frac{a_0}{2l}s + a_0$ und integrieren zwischen $s = 0$ und $s = l$ liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_l^2 &= -\frac{1}{4}a_0 l + a_0 l \\ &= \frac{3}{4}a_0 l \\ \Rightarrow v_l &= \sqrt{\frac{3}{2}a_0 l} \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Ort	Geschwindigkeit	Beschleunigung
$x(t) = \frac{a_0}{2}t^2$	$\dot{x}(t) = a_0 t$	$\ddot{x}(t)$ geg.
$r(t) = \frac{a_1}{2}t^2 + v_0 t + r_0$	$\dot{r}(t)$ geg.	$\ddot{r}(t) = a_1$
$s(t)$ geg.	$\dot{s}(t) = L\Omega\cos\Omega t$	$\ddot{s}(t) = -L\Omega^2\sin\Omega t$
$y(t) = \frac{u_0}{\omega}\left[1 + e^{\omega t} - e^{\omega t_0}\right]$	$\dot{y}(t)$ geg.	$\ddot{y}(t) = u_0\omega e^{\omega t}$
$y(t)$ geg.	(1)	(2)
$\varphi(t) = e^t$	$\dot{\varphi}(t)$ geg.	$\ddot{\varphi}(t) = e^t$
$x(t) = L\cos\lambda t - \frac{v_0}{\lambda^3}\sin\lambda t$	$\dot{x}(t) = -L\lambda\sin\lambda t - \frac{v_0}{\lambda^2}\cos\lambda t$	$\ddot{x}(t)$ geg.

$$\begin{aligned} (1): \quad \dot{y}(t) &= -\frac{r_0}{2}\Big(t - t_1\Big)^{-\frac{3}{2}}\cos\Psi(t) \\ &\quad - 2r_0\omega^2 t\Big(t - t_1\Big)^{-\frac{1}{2}}\sin\Psi(t) \\ (2): \quad \ddot{y}(t) &= \frac{3r_0}{4}\Big(t - t_1\Big)^{-\frac{5}{2}}\cos\Psi(t) \\ &\quad + 2r_0\omega^2 t\Big(t - t_1\Big)^{-\frac{3}{2}}\sin\Psi(t) \\ &\quad - 2r_0\omega^2\Big(t - t_1\Big)^{-\frac{1}{2}}\sin\Psi(t) \\ &\quad - 4r_0\omega^4 t^2\Big(t - t_1\Big)^{-\frac{1}{2}}\cos\Psi(t) \\ \text{mit} \quad \Psi(t) &= \omega^2(t^2 - t_0^2) \end{aligned}$$