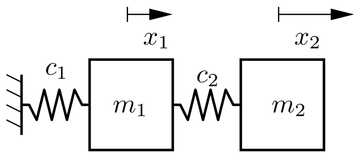
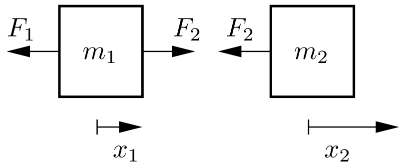
Tutorium

Aufgabe 161

(a)





Federkräfte:

$$F_1 = c_1 x_1$$
$$F_2 = c_2(x_2 - x_1)$$

2. NEWTONsches Gesetz:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -F_1 + F_2 \\ &= -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 &= -F_2 \\ &= c_2 x_1 - c_2 x_2 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\ ,$$

mit $c = \frac{1}{2}c_1 = c_2$ und $m = \frac{1}{2}m_1 = m_2$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{1}$$

(b) Eine Möglichkeit obiges Gleichungssystem zu lösen bietet ein rein harmonischer Ansatz:

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cos(\omega t) \tag{2}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{x}} = -\omega^2 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cos(\omega t) \tag{3}$$

(2) und (3) in (1):

$$\begin{bmatrix} -2m\omega^2 + 3c & -c \\ -c & -m\omega^2 + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Die triviale Lösung von Gl. (4) ist $A = B = 0$. Das beschreibt die statische Ruhelage, also keine Schwingung. Weitere Lösungen sind nur möglich, wenn det $= 0$ (Eigenwertproblem) gilt.

$$\det \begin{bmatrix} -2m\omega^2 + 3c & -c \\ -c & -m\omega^2 + c \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \left(-2m\omega^2 + 3c\right)\left(-m\omega^2 + c\right) - c^2 &= 0 \\ 2m^2\omega^4 - 5mc\omega^2 + 2c^2 &= 0 \\ \omega^4 - \frac{5c}{2m}\omega^2 + \frac{c^2}{m^2} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

p/q-Formel für ω^2:

$$\omega_{I/II}^2 = \frac{5c}{4m} \pm \sqrt{\frac{25c^2}{16m^2} - \frac{c^2}{m^2}}$$

$$= \left(\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\right)\frac{c}{m}$$

$$\omega_I^2 = 2\frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_{2/4} = \pm\sqrt{2\frac{c}{m}} \tag{7}$$

$$\omega_{II}^2 = \frac{c}{2m} \quad \Rightarrow \quad \omega_{1/3} = \pm\sqrt{\frac{c}{2m}} \tag{8}$$

Nur + ist sinnvoll. ω_1 und ω_2 (wobei die Indizierung "1" dem geringeren Wert zugewiesen wird) stellen die beiden Eigenkreisfrequenzen des Systems dar!
Die zugehörigen Eigenformen E_1 und E_2 erhalten wir mittels Einsetzen von ω_1 und ω_2 in (4), wobei nur eine der beiden skalarwertigen Gleichungen genutzt werden muss, da die Zeilen linear abhängig sind.
<u>Eigenform zu ω_1:</u>

$$\begin{aligned} (-2m\omega_1^2 + 3c)A_1 - cB_1 &= 0 \\ (-c + 3c)A_1 - cB_1 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{B_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_1 = B_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Dies stellt eine gleichphasige Schwingung dar, bei der m_2 mit doppelt so großer Amplitude wie m_1 schwingt.

<u>Eigenform zu ω_2:</u>

$$\begin{aligned} (-2m\omega_2^2 + 3c)A_2 - cB_2 &= 0 \\ (-4c + 3c)A_2 - cB_2 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$A_2 = -B_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{E}_2 = B_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

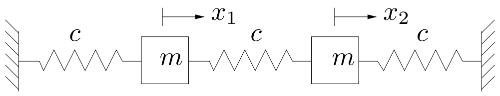
Dies stellt eine gegenphasige Schwingung mit gleicher Amplitude dar.
Nennt man den ersten Eigenvektor $\underline{e}_1$ und den zweiten $\underline{e}_2$, dann lautet die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = \underline{e}_1\{A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t\} \\ + \underline{e}_2\{A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t\} \end{aligned} \tag{13}$$

Hausaufgabe

Aufgabe 165

(a)



Ersatzsystem

$$
\begin{aligned}
F_1 &= cx_1\\
F_2 &= c(x_2 - x_1)\\
F_3 &= cx_2
\end{aligned}
$$

2. Newtonsches Gesetz:
linker (unterer) Klotz:

$$m\ddot{x}_1 = -F_1 + F_2 = -cx_1 + c(x_2 - x_1)$$

rechter (oberer) Klotz:

$$m\ddot{x}_2 = -F_2 - F_3 = -c(x_2 - x_1) - cx_2$$

$$\begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c\\ -c & 2c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

(b) Ansatz:

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\\ B \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

eingesetzt:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 m + 2c & -c\\ -c & \lambda^2 m + 2c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A\\ B \end{bmatrix} e^{\lambda t} = 0 \tag{14}$$

triviale Lösung: $A = B = 0$

sonst:

$$
\begin{aligned}
0 &= \det\begin{bmatrix} \lambda^2 m + 2c & -c\\ -c & \lambda^2 m + 2c \end{bmatrix}\\
&= m^2\lambda^4 + 4cm\lambda^2 + 4c^2 - c^2\\
\Rightarrow &\lambda^4 + 4\frac{c}{m}\lambda^2 + 3(\frac{c}{m})^2 = 0
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 &= \mu\\
\mu_{1/2} &= -2\frac{c}{m} \pm \sqrt{4(\frac{c}{m})^2 - 3(\frac{c}{m})^2}\\
&= (-2 \pm 1)\frac{c}{m}\\
\mu_1 = -\frac{c}{m};\ & \mu_2 = -3\frac{c}{m}\\
\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{m}};\ & \lambda_{3/4} = \pm i\sqrt{3\frac{c}{m}}
\end{aligned}
$$

1. Eigenkreisfrequenz: $\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{c}{m}}$
zugehörige Eigenform aus (14) mit $\lambda^2 = \mu_1$:

$$(-\frac{c}{m}m + 2c)A - cB = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$\text{Eigenvektor: } = \begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

Beide Massen schwingen parallel (phasengleich) mit gleicher Amplitude.

2. Eigenkreisfrequenz: $\omega_{0,2} = \sqrt{3\frac{c}{m}}$
zugehörige Eigenform aus (14) mit $\lambda^2 = \mu_2$:

$$(-3\frac{c}{m}m + 2c)A - cB = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

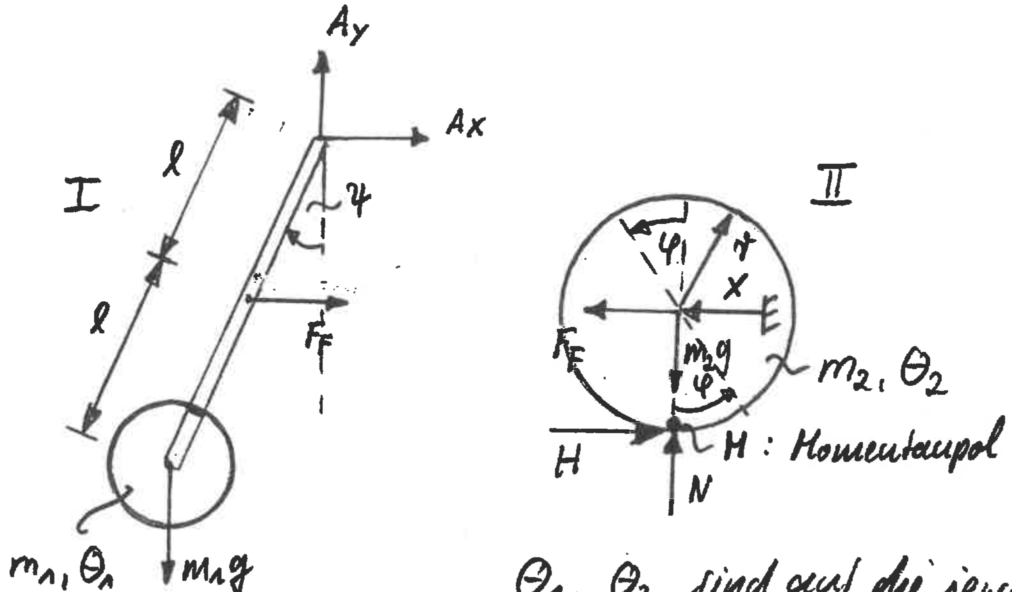
$$\text{Eigenvektor: } = \begin{bmatrix} 1\\ -1 \end{bmatrix}$$

Beide Massen schwingen entgegengesetzt mit gleicher Amplitude.

167

Aufgabe ~~145~~:

(a) Freischnitt:



Θ_1, Θ_2 sind auf die jeweiligen Schwerpunkte bezogen!

Anmerkung: - Die Schrägstellung der Feder wurde nicht berücksichtigt.

- Da der Stab masselos ist, ist der Schwerpunkt des Pendels identisch mit dem Schwerpunkt der "Endmasse".

Drallsatz: I $\quad \Theta^A \ddot{\psi} = \Sigma M^A = -F_F \cdot l\cos\psi - m_1 g 2l \sin\psi$ (1)

$$\text{mit } \Theta^A = \Theta_1 + m_1 \cdot (2l)^2$$

II $\quad \Theta^M \ddot{\varphi} = \Sigma M^M = F_F \cdot r \quad$ mit $\Theta^M = \Theta_2 + m_2 r^2$

Kraftgesetze: $\quad F_F = c\,(l\sin\psi - r\varphi)$

$\Rightarrow$ (1) $\;(\Theta_1 + 4m_1 l^2)\ddot{\psi} = -c\,(l\sin\psi - r\varphi)\cdot l\cos\psi - 2m_1 g\, l\sin\psi$

(2) $\;(\Theta_2 + m_2 r^2)\ddot{\varphi} = c\,(l\sin\psi - r\varphi)\cdot r$

Bei kleinen Winkelausschlägen dürfen wir linearisieren:

$\sin \psi \approx \psi \qquad \sin \varphi \approx \varphi$

$\cos \psi \approx 1 \qquad \cos \varphi \approx 1$

$$\Rightarrow \quad (\Theta_1 + 4m_1 l^2)\ddot{\psi} + c(l\psi - r\varphi)\cdot l + 2m_1 g l \psi = 0 \quad (3)$$
$$(\Theta_2 + m_2 r^2)\ddot{\varphi} - c(l\psi - r\varphi)\cdot r = 0 \quad (4)$$

(3) und (4) in Matrizenschreibweise "$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{x}} + \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$":

$$\boxed{\begin{pmatrix} \Theta_1 + 4m_1 l^2 & 0 \\ 0 & \Theta_2 + m_2 r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cl^2 + 2m_1 g l & -crl \\ -crl & r^2 c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Gegeben: $m_1 = \frac{m}{33}$; $m_2 = m$; $\Theta_1 = \frac{1}{66} m r^2$; $\Theta_2 = \frac{1}{2} m r^2$; $l = 2r$; $c = \frac{mg}{33r}$

$$\Rightarrow \quad \Theta_1 + 4m_1 l^2 = \frac{1}{66} m r^2 + \frac{4 \cdot m \cdot 4r^2}{33} = \underline{\frac{1}{2} m r^2}$$

$\Theta_2 + m_2 r^2 = \underline{\frac{3}{2} m r^2}$; $(cl + 2m_1 g)\cdot l = \Big(2cr + \underbrace{\frac{2mg}{33}}_{= 2cr}\Big)\cdot 2r = \underline{8cr^2}$

$crl = \underline{2cr^2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m r^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8cr^2 & -2cr^2 \\ -2cr^2 & cr^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Big/ : \Big(\frac{mr^2}{2}\Big)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \frac{2c}{m}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Harmonischer Ansatz (ausreichend, da System konservativ ist):

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \hat{\underset{\sim}{x}} \cdot \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \hat{\underset{\sim}{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underset{\sim}{x}} = -\hat{\underset{\sim}{x}}\,\omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 + 16\frac{c}{m} & -4\frac{c}{m} \\ -4\frac{c}{m} & -3\omega^2 + \frac{2c}{m} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{S}} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Damit überhaupt eine nicht trivial Lösung existiert, muß die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden
$\Rightarrow$ Nur für spezielle ω existieren solche Lösungen!
["Eigen" wertproblem!]

$$\det \underset{\sim}{S} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(16\frac{c}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{2c}{m} - 3\omega^2\right) - 16\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0 \qquad \text{[Charakteristische Gleichung]}$$

$$3\omega^4 - 50\frac{c}{m}\omega^2 + 16\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{50}{3}\frac{c}{m}\omega^2 + \frac{16}{3}\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0$$

$$\omega^2_{I/II} = \frac{25}{3}\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}}\;\frac{c}{m} = \frac{25 \pm \sqrt{577}}{3}\,\frac{c}{m}$$

$$\omega_{2/4} = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{25+\sqrt{577}}{3}\frac{c}{m}} \approx \overset{+}{(-)}\, \underline{4{,}04\sqrt{\frac{c}{m}}} \qquad (6)$$

$$\omega_{1/3} = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{25-\sqrt{577}}{3}\frac{c}{m}} \approx \overset{+}{(-)}\, \underline{0{,}57\sqrt{\frac{c}{m}}} \qquad (7)$$

Nicht gefordert, aber dennoch sollen die Eigenformen angegeben werden: $\underline{EF \text{ zu } \omega_1}$: (7) in (5) daraus die 1. Glg:

$$\left(-\frac{25-\sqrt{577}}{3} + 16\right)\hat{u}_1 = 4\hat{\varphi}_1 \Rightarrow \underline{\hat{u}_1 = \frac{12}{23+\sqrt{577}}\hat{\varphi}_1}$$

$$\hat{\underset{\sim}{x}}_1 = \hat{\varphi}_1 \begin{pmatrix} \frac{12}{23+\sqrt{577}} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \underline{\underline{\hat{\varphi}_1 \begin{pmatrix} 0{,}26 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$\underline{EF \text{ zu } \omega_2}$: (6) in (5) $\Rightarrow$

$$\left(-\frac{25+\sqrt{577}}{3} + 16\right)\hat{u}_2 = 4\hat{\varphi}_2$$

$$\underline{\hat{u}_2 = \frac{12}{23-\sqrt{577}}\hat{\varphi}_2} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{x}_2 \approx \hat{\varphi}_2 \begin{pmatrix} -11{,}8 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$