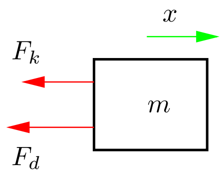
Tutorium

Aufgabe 155

(a)



$$m\ddot{x} = -F_k - F_d \tag{1}$$

Material-Struktur-Gleichung und Kinematik

$$F_k = k(x-u) \tag{2}$$
$$F_d = d(\dot{x}-\dot{u}) \tag{3}$$
$$u(t) = \hat{u}\cos\Omega t \tag{4}$$
$$\dot{u}(t) = -\hat{u}\Omega\sin\Omega t \tag{5}$$

ergibt:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \hat{u}\big(-2\delta\Omega\sin\Omega t + \omega_0^2\cos\Omega t\big) \tag{6}$$
$$\text{mit} \quad 2\delta := \frac{d}{m}\;; \quad \omega_0^2 := \frac{k}{m} \tag{7}$$

(b) Setze $x = \Re\{x_1\} = \frac{x_1}{2} + cc$. Dann gilt für x_1:

$$\ddot{x}_1 + 2\delta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \hat{u}\big(i2\delta\Omega + \omega_0^2\big)e^{i\Omega t} \tag{8}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$x_1(t) = Ce^{i\Omega t} \tag{9}$$

eingesetzt:

$$\big(-\Omega^2 + 2i\delta\Omega + \omega_0^2\big)Ce^{i\Omega t} = \hat{u}\big(i2\delta\Omega + \omega_0^2\big)e^{i\Omega t} \quad \forall t \tag{10}$$

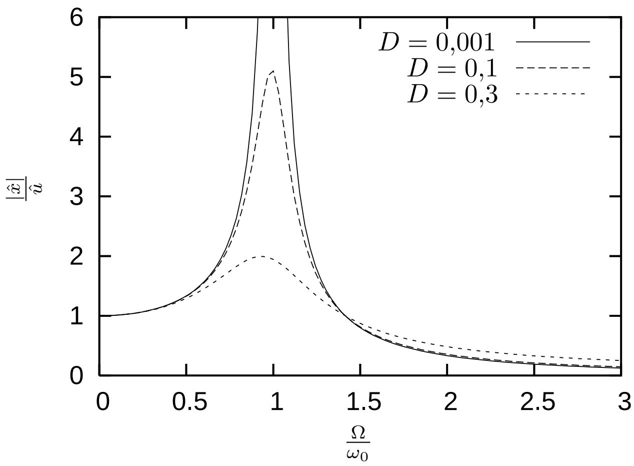
Mit geeigneten Abkürzungen:

$$\xi := \omega_0^2 - \Omega^2\,, \quad \eta := 2\delta\Omega \tag{11}$$
$$C = \frac{\omega_0^2 + i\eta}{\xi + i\eta}\hat{u} \tag{12}$$
$$= \frac{\omega_0^2\xi + \eta^2 + i(\xi\eta - \omega_0^2\eta)}{\xi^2+\eta^2}\hat{u} \tag{13}$$

Schwingungsamplitude:

$$|\hat{x}| = |C| = \frac{\sqrt{\omega_0^4(\xi^2+\eta^2) + \eta^2(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}\hat{u} \tag{14}$$
$$|\hat{x}| = \sqrt{\frac{\omega_0^4+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}\hat{u} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + (2\delta\Omega)^2}{\big(\omega_0^2-\Omega^2\big)^2 + \big(2\delta\Omega\big)^2}}\hat{u} \tag{15}$$

(c)



mit $D := \frac{\delta}{\omega_0}$.

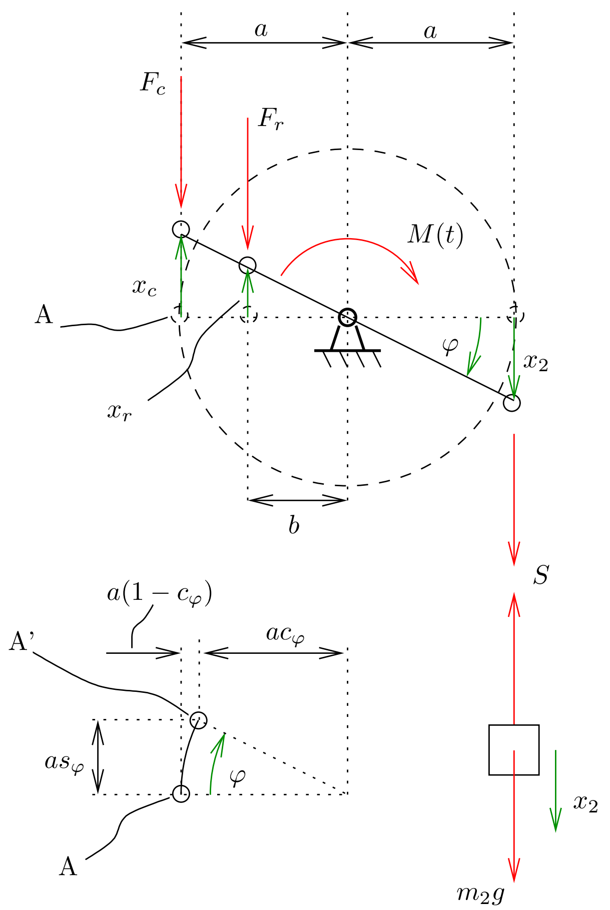
$$\Omega \to 0: \qquad |\hat{x}| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\big(\omega_0^2\big)^2}}\hat{u} = \hat{u} \tag{16}$$
$$\Omega \to \infty: \qquad |\hat{x}| = \lim_{\Omega\to\infty}\frac{2\delta\Omega}{\sqrt{\Omega^4}}\hat{u} = 0 \tag{17}$$
$$\Omega = \omega_0: \qquad |\hat{x}| = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 4\delta^2}{4\delta^2}} = \sqrt{\frac{1+4D^2}{4D^2}} \tag{18}$$

Hausaufgabe

Aufgabe 148

(a) Abkürzungen:

$$s_\varphi := \sin\varphi\ , \quad c_\varphi := \cos\varphi \tag{19}$$



Freischnitte in der ausgelenkten Lage und genauere Betrachtung der Kinematik am Beispiel der Bewegung von Punkt A:

An der Skizze unten links erkennt man, dass der Punkt A sich bei der Drehung der Scheibe auf einem Kreisbogen bewegt. Für positiven Winkel bewegt er sich also nach oben und nach rechts, so dass er dann bei A' liegt. Für kleine Winkel mit $|\varphi| << 1$ ist jedoch $c_\varphi \approx 1$ und $s_\varphi \approx \varphi$, so dass für diesen Fall kleiner Auslenkungen näherungsweise gilt:

$$x_2 = a\varphi \tag{20}$$
$$x_r = b\varphi \tag{21}$$
$$x_c = a\varphi \tag{22}$$

Drehimpulssatz der Scheibe um ihren Schwerpunkt (den Lagerpunkt):

$$\Theta\ddot{\varphi} = Sa - F_r b - F_c a + M(t) \tag{23}$$

Schwerpunktsatz der Masse m_2:

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - S \tag{24}$$

Kraftgesetze:

$$F_r = r\dot{x}_r = rb\dot{\varphi}$$
$$F_c = cx_c = ca\varphi$$
$$\text{geg.: } M(t) = M_0 \sin\lambda t$$

Kinematik und Kraftgesetze eingesetzt in Gln. (23) und (24):

$$\Theta\ddot{\varphi} = Sa - rb^2\dot{\varphi} - ca^2\varphi + m_0 \sin\lambda t$$
$$m_2 a\ddot{\varphi} = m_2 g - S$$

eliminieren von S:

$$\left(\Theta + m_2a^2\right)\ddot{\varphi} + rb^2\dot{\varphi} + ca^2\varphi = m_2ga + M_0\sin\lambda t$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{rb^2}{\Theta + m_2a^2}\dot{\varphi} + \frac{ca^2}{\Theta + m_2a^2}\varphi = \frac{M_0}{\Theta + m_2a^2}\sin\lambda t + \frac{m_2ga}{\Theta + m_2a^2} \tag{25}$$

(b) Zunächst werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$M^* = \frac{M_0}{\Theta + m_2a^2}$$
$$k^* = \frac{m_2ga}{\Theta + m_2a^2}$$
$$\omega_0^2 = \frac{ca^2}{\Theta + m_2a^2} \quad \text{ungedämpfte Eigenkreisfreq.}$$
$$2D\omega_0 = \frac{rb^2}{\Theta + m_2a^2} \quad \text{Dämpfungskoeffizient}$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \text{(gedämpfte) Eigenkreisfreq.}$$

Dann folgt daraus die DGL nach DIN-1311:

$$\ddot{\varphi} + 2D\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = M^*\sin\lambda t + k^*$$

Transformation in die statische Ruhelage($\varphi = \varphi_0 + \varphi_{stat}$): vgl. Aufgabe 1.

$$\ddot{\varphi}_0 + 2D\omega_0\dot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = M^*\sin\lambda t$$

Lösung der DGL nach Formelblatt:

$$\varphi_0(t) = \varphi_{0h} + \varphi_{0p} \tag{26}$$
$$= e^{-D\omega_0 t}(A\cos\omega_d + B\sin\omega_d t) + ... \tag{27}$$
$$... + \kappa\alpha(\eta)M_0\sin(\lambda t - \varphi(\eta)) \tag{28}$$
$$\dot{\varphi}_0(t) = -D\omega_0 e^{-D\omega_0 t}(A\cos\omega_d + B\sin\omega_d t) + ... \tag{29}$$
$$... + e^{-D\omega_0 t}(-A\omega_0\sin\omega_d + \omega_d B\cos\omega_d t) + ... \tag{30}$$
$$... + \kappa\alpha(\eta)M_0\sin(\lambda t - \varphi(\eta)) + \kappa\alpha(\eta)M_0\sin(\lambda t - \varphi(\eta))\lambda \tag{31}$$

Anfangsbedingungen:

$$\varphi_0(t=0) = \frac{m_2 g}{ca} \tag{32}$$
$$\dot{\varphi}_0(t=0) = 0 \tag{33}$$

Diese in die Lösungen eingesetzt ergibt:

$$\frac{m_2 g}{ca} = \varphi_0(t=0) = A + \kappa\alpha(\eta) M_0 \sin(-\varphi(\eta)) \tag{34}$$

$$A = \frac{m_2 g}{ca} - \kappa\alpha(\eta) M_0 \sin(-\varphi(\eta)) \tag{35}$$

$$0 = \dot{\varphi}_0(t) = -D\omega_0 A + B\omega_d + \kappa\alpha(\eta) M_0 \sin(-\varphi(\eta))\lambda \tag{36}$$

mit eingesetztem A: (37)

$$B = \frac{D\omega_0}{\omega_d}\left(\frac{m_2 g}{ca} - \kappa\alpha(\eta) M_0 \sin(-\varphi(\eta))\right) \tag{38}$$

$$-\kappa\alpha(\eta) M_0 \cos(-\varphi(\eta))\lambda \tag{39}$$

(40)

Wenn man nun A und B in die Lösung einsetzt erhält man die Auslekkung φ_0 zu jedem Zeitpunkt.

(c) Berechnung des Amplitudenfrequenzgangs und Phasenfrequenzgangs: Vom Formelblatt: Amplitudenfrequenzgang:

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \tag{41}$$

$$\eta = \frac{\lambda}{\omega_0} \tag{42}$$

$$2D\omega_0 = \frac{rb^2}{\Theta + m_2 a^2} \tag{43}$$

$$\Rightarrow D = \frac{rb^2}{(\Theta + m_2 a^2)2\omega_0} \tag{44}$$

$$\alpha(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{rb^2}{(\Theta + m_2 a^2)}\frac{\lambda}{\omega_0^4}}} \tag{45}$$

(46)

mit

$$\omega_0^2 = \frac{rb^2}{\Theta + m_2 a^2} \tag{47}$$

Phasenfrequenzgang:

$$\varphi(\eta) = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) \tag{48}$$

$$\text{mit } \eta = \frac{\lambda}{\omega_0} \text{ und} \tag{49}$$

$$D = \frac{rb^2}{(\Theta + m_2 a^2)2\omega_0} \tag{50}$$

$$\varphi(\eta) = \arctan \frac{2rb^2 \frac{\lambda}{\omega_0}}{(\Theta + m_2 a^2)1 - \frac{\lambda}{\omega_0}^2} \tag{51}$$

(52)

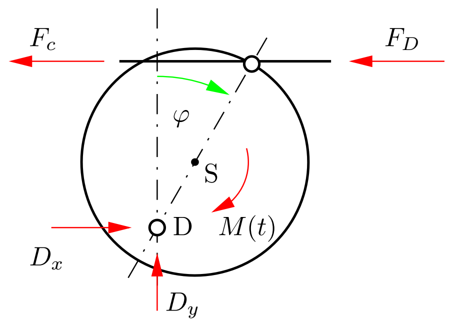
mit

$$\omega_0^2 = \frac{rb^2}{\Theta + m_2 a^2} \tag{53}$$

Aufgabe 153

(a) Anmerkung: Schrägstellung von Feder und Dämpfer werden vernachlässigt! Gravitation spielt keine Rolle!

Freischnitt einer ausgelenkten Lage:



Drallsatz um den ruhenden Punkt D bei kleinen Ausschlägen:

$$\Theta^D \ddot{\varphi} = M(t) - 3aF_c - 3aF_D \tag{54}$$

$$\text{mit } F_c = c\,3a\varphi, \tag{55}$$

$$F_D = r3a\dot{\varphi} \text{ und} \tag{56}$$

$$\Theta^D = \Theta^S + ma^2 = 3ma^2 \tag{57}$$

Bereits linearisiert, da kleine Auslenkungen vorausgesetzt.

$$\Rightarrow \Theta^D \ddot{\varphi} + 9a^2 r\dot{\varphi} + 9a^2 c\varphi = M_0 \cos \Omega t \tag{58}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3r}{m}\dot{\varphi} + \frac{3c}{m}\varphi = \frac{M_0 \cos \Omega t}{3ma^2} \tag{59}$$

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \hat{M} \cos \Omega t$$

$$\text{mit } \gamma := \frac{9a^2 r}{J_D} = 3\frac{r}{m}\,;\ \omega_0^2 := \frac{9a^2 c}{\Theta^D} = 3\frac{c}{m}\,; \tag{60}$$

$$\hat{M} := \frac{M_0}{\Theta^D} = \frac{M_0}{3ma^2} \tag{61}$$

(b) Auf der rechten Seite der Dgl.(59) steht ein Erregermoment, welches das System zu speziellen Schwingungen zwingt. Von freien Schwingungen wird dann gesprochen, wenn diese Erregung nicht vorhanden ist und das System selbst entscheidet wie es schwingt. Die Untersuchung freier Schwingungen bedeutet damit die Lösung der homogenen Dgl.

$$\ddot{\varphi} + \frac{3r}{m}\dot{\varphi} + \frac{3c}{m}\varphi = 0 \tag{62}$$

Die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ist:

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3c}{m} - \left(\frac{3r}{2m}\right)^2} \tag{63}$$

(c) Die Bewegungsdifferenzialgleichung lautet:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{M_0}{3ma^2}\cos(\Omega t) \tag{64}$$

$$\text{mit} \quad 2\delta = 3\frac{r}{m} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = 3\frac{c}{m}$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (64) setzt sich aus der homogenen und einer partikulären Lösung zusammen. Die Lösung der homogenen Dgl. ist bereits bekannt und lautet:

$$\varphi_h(t) = e^{-\delta t}\left(A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)\right) \tag{65}$$

$$\text{mit} \qquad \omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{66}$$

Offensichtlich klingt dieser Anteil der Gesamtlösung $\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$ mit der Zeit ab, so dass nach einer gewissen Zeit nur der partikuläre Anteil von Bedeutung ist (eingeschwungener Zustand). Die partikuläre Lösung der Gl. (64) kann auf verschiedene Weise ermittelt werden. Wir benutzen einen reellwertigen Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\varphi_p(t) &= \tilde{C}\left(\cos(\Omega t - \Psi)\right) \qquad (67)\\ &= \tilde{C}\left[\cos(\Omega t)\cos\Psi + \sin(\Omega t)\sin\Psi\right]\end{aligned}$$

Ψ : Phasenverschiebung zwischen Erregung und Antwort

Additionstheorem: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Die Ableitungen:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_p(t) &= -\Omega\tilde{C}\left[\sin(\Omega t)\cos\Psi - \cos(\Omega t)\sin\Psi\right]\\ \ddot{\varphi}_p(t) &= -\Omega^2\tilde{C}\left[\cos(\Omega t)\cos\Psi + \sin(\Omega t)\sin\Psi\right]\end{aligned}$$

einsetzen in (64):

$$\begin{aligned}&-\Omega^2\tilde{C}\left[\cos(\Omega t)\cos\Psi + \sin(\Omega t)\sin\Psi\right]\\ &-2\delta\Omega\tilde{C}\left[\sin(\Omega t)\cos\Psi - \cos(\Omega t)\sin\Psi\right]\\ &+\omega_0^2\tilde{C}\left[\cos(\Omega t)\cos\Psi + \sin(\Omega t)\sin\Psi\right] = \frac{M_0}{3ma^2}\cos(\Omega t)\end{aligned}$$

Diese Gl. wird mit $\frac{1}{\omega_0^2}$ multipliziert, $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ werden ausgeklammert und die Abstimmung $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ eingeführt.

$$\begin{aligned}&\left(-\eta^2\tilde{C}\cos\Psi + \frac{2\delta}{\omega_0}\eta\tilde{C}\sin\Psi + \tilde{C}\cos\Psi - \frac{M_0}{3ma^2}\frac{1}{3\frac{c}{m}}\right)\cos(\Omega t)\\ &\quad + \left(-\eta^2\tilde{C}\sin\Psi - \frac{2\delta}{\omega_0}\eta\tilde{C}\cos\Psi + \tilde{C}\sin\Psi\right)\sin(\Omega t) = 0\end{aligned} \tag{68}$$

Für alle Zeiten ist diese Gl. nur erfüllt, wenn die entsprechenden Koeffizienten verschwinden:

$$\left(1-\eta^2\right)\tilde{C}\cos\Psi + \frac{2\delta}{\omega_0}\eta\tilde{C}\sin\Psi = \frac{M_0}{9ca^2} \tag{69}$$

$$\left(1-\eta^2\right)\tilde{C}\sin\Psi - \frac{2\delta}{\omega_0}\eta\tilde{C}\cos\Psi = 0 \tag{70}$$

Aus (70) folgt für den Phasenfrequenzgang:

$$\tan\Psi = \frac{\frac{2\delta}{\omega_0}\eta}{1-\eta^2} \qquad \Rightarrow \qquad \Psi = \arctan\left(\frac{2\delta\eta}{\omega_0(1-\eta^2)}\right) \tag{71}$$

Die Amplitude bekommen wir aus $(69)^2 + (70)^2$:

$$\left(1-\eta^2\right)^2\tilde{C}^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\eta\right)^2\tilde{C}^2 = \left(\frac{M_0}{9ca^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{C} = \frac{M_0}{9ca^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\eta\right)^2}} \tag{72}$$

Die Lösung im eingeschwungenen Zustand lautet damit:

$$\varphi_p(t) = \frac{M_0}{9ca^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\eta\right)^2}}\cos\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{2\delta\eta}{\omega_0(1-\eta^2)}\right)\right) \tag{73}$$
