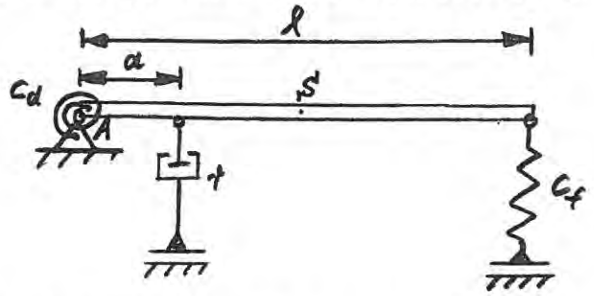
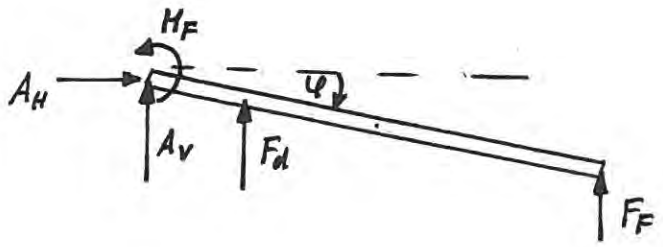
Aufgabe 135

(a) Ersatzmodell (denn die Verbindungsstange zwischen den Federn sei als masselos vorausgesetzt):



<u>Anmerkung:</u> Die beiden Drehfedern (parallel geschaltet) werden durch eine Drehfeder der Steifigkeit c_d ersetzt! Gravitation sei vernachlässigt!

<u>Freischnitt eines Momentanzustandes</u>



<u>Drallsatz bzgl. A:</u> $\Theta_A \ddot{\varphi} = \Sigma M_A = -M_F - F_d \cdot a\cos\varphi - F_F \cdot l\cos\varphi$ (1)

<u>Materialgesetze:</u>

$$\left.\begin{aligned} F_d &= r(a\sin\varphi)^{\cdot} = r a\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ F_F &= c_f\, l\sin\varphi \\ M_F &= c_D\,\varphi \end{aligned}\right\} (2)$$

<u>Satz von Steiner:</u> $\Theta_A = \Theta_S + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$ mit $\Theta_S = \frac{1}{12} m l^2$

$$\Rightarrow \underline{\Theta_A = \frac{1}{3} m l^2} \quad (3)$$

(2) und (3) in (1) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi} = -c_D\varphi - r a^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} - c_f l^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{3 r a^2}{m l^2}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} + \frac{3 c_D}{m l^2}\varphi + \frac{3 c_f}{m}\sin\varphi\cos\varphi = 0} \quad (4)$$

Nichtlineare Bewegungsdgl.

(b) Linearisierung um $\varphi = 0 \Rightarrow \begin{rcases} \sin\varphi \approx \varphi \\ \cos\varphi \approx 1 \end{rcases} (5) \begin{cases} \sin\varphi\cos\varphi \approx \varphi \\ \cos^2\varphi \approx 1 \end{cases}$

$$\overset{(4),(5)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{3+a^2}{ml^2}\dot{\varphi} + \frac{3(c_D + c_f \cdot l^2)}{ml^2}\varphi = 0} \quad (6)$$

Linearisierte Bewegungsdgl.

Einführung von "Abkürzungen" für die Koeffizienten in (6)

$$\frac{3+a^2}{ml^2} = 2\delta \quad ; \quad \frac{3(c_D + c_f \cdot l^2)}{ml^2} = \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

<u>Ansatz</u>: $\varphi(t) = A e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \lambda A e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Damit überhaupt Schwingungen zustandekommen muß gelten: $\omega_0^2 > \delta^2$ (negativer Wert unter Wurzel!)

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{=:\omega_D \text{ (zunächst nur weitere Abkürzung)}}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$= e^{-\delta t}\left(A_1 e^{i\omega_D t} + A_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

$$= e^{-\delta t}\left[A_1(\cos\omega_D t + i\sin\omega_D t) + A_2(\cos\omega_D t - i\sin\omega_D t)\right]$$

$$= e^{-\delta t}\left[\underbrace{(A_1 + A_2)}_{=:B_1}\cos\omega_D t + \underbrace{(A_1 - A_2)i}_{=:B_2}\sin\omega_D t\right] \quad (7)$$

Dies ist offensichtlich eine Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3(c_D + c_f l^2)}{ml^2} - \left(\frac{3+a^2}{2ml^2}\right)^2}$$

Nun hat die Abkürzung ω_D eine physikalische Bedeutung erhalten!

(c) Spezielle Lösung für die A.B.: $\varphi(0) = 0$

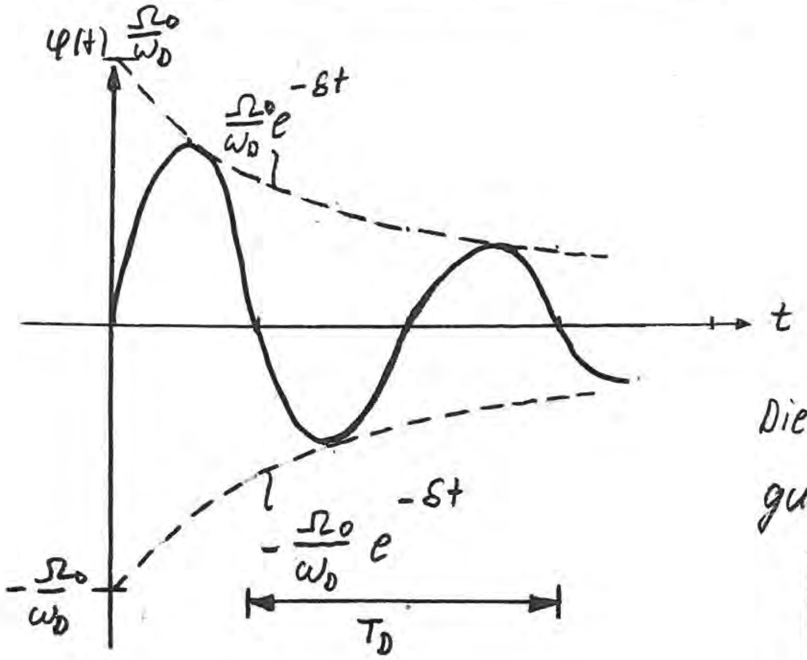
$$\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$$

aus (7) $\Rightarrow$ $$\dot{\varphi}(t) = -\delta e^{-\delta t}\left[B_1 \cos(\omega_D t) + B_2 \sin(\omega_D t)\right] + e^{-\delta t}\left[-\omega_D B_1 \sin(\omega_D t) + \omega_D B_2 \cos(\omega_D t)\right]$$

aus $\varphi(0) \overset{!}{=} 0$ folgt $\underline{\underline{B_1 = 0}}$

aus $\dot{\varphi}(0) \overset{!}{=} \Omega_0$ folgt $\omega_D \cdot B_2 \overset{!}{=} \Omega_0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{B_2 = \frac{\Omega_0}{\omega_D}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) = e^{-\delta t} \cdot \frac{\Omega_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t)}$$

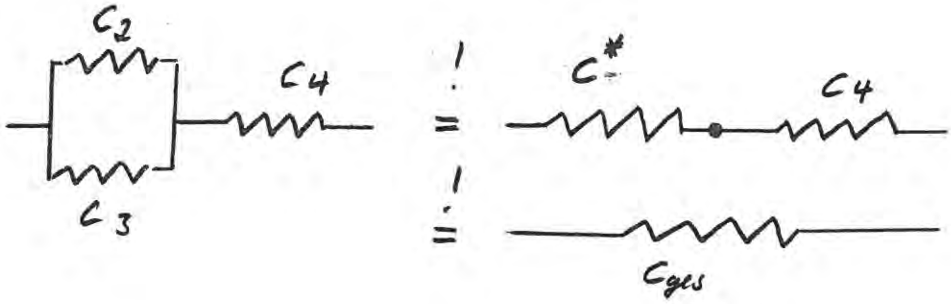


Die Periodendauer der Schwingung ist $T_D = \frac{1}{f_D} = \frac{2\pi}{\omega_D}$

$$\boxed{T_D = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Aufgabe 141

Zunächst werden die Parallel- und in Reihe geschalteten Federsteifigkeiten zu einer Gesamtsteifigkeit c_{ges} zusammengefaßt:



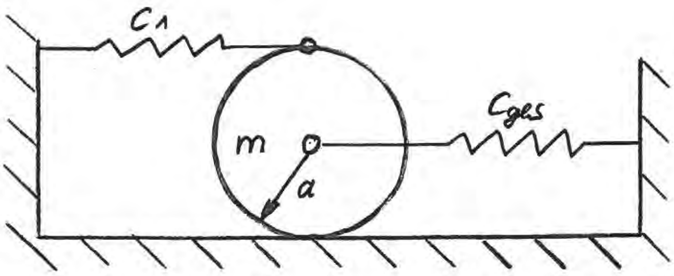
c^* ermitteln wir aus der Parallelschaltung von c_2 und c_3

$$\underline{c^* = c_2 + c_3} \qquad (1)$$

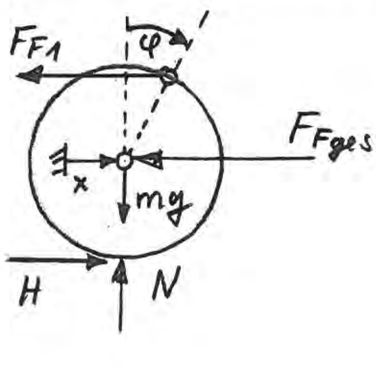
c_{ges} ermitteln wir aus der Reihenschaltung von c^* und c_4

$$\frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c^*} + \frac{1}{c_4} \Rightarrow \underline{\underline{c_{ges}}} = \frac{c_4 \cdot c^*}{c_4 + c^*} \overset{(1)}{=} \underline{\underline{\frac{c_4 \cdot (c_2 + c_3)}{c_2 + c_3 + c_4}}} \qquad (2)$$

Das Ersatzsystem sieht damit wie folgt aus:



Freischnitt (einer ausgelenkten Lage):



Anmerkung: Die Schrägstellung der Feder 1 soll vernachlässigt werden.

Schwerpunkt- und Drallsatz:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_x = -F_{Fges} - F_{F1} + H \qquad (3)$$
$$\Theta_s \ddot{\varphi} = \Sigma M_s = -H\cdot r - F_{F1}\cdot a\cos\varphi \qquad (4)$$

Anmerkung: Alternativ kann auch nur der Drallsatz bzgl. des Momentanzentrums aufgestellt werden. Damit erspart man sich die Elimination von H, muß jedoch den Satz von Steiner beachten!

Materialgesetze:
$$\left.\begin{aligned} F_{Fges} &= c_{ges}\, x \\ F_{F1} &= c_1\,(x + a\cdot\sin\varphi) \end{aligned}\right\} (5)$$

Kinematische Beziehung (Rollbedingung): $\dot{x} = a\dot{\varphi}$ mit $x(0)=0$ und $\varphi(0)=0$ folgt $\boxed{x = a\varphi}$ zudem natürlich $\ddot{x} = a\ddot{\varphi}$ (6)

$$(4)\cdot\frac{1}{a} + (3) \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\left(m + \frac{\Theta_s}{a^2}\right)a\ddot{\varphi} = -F_{Fges} - F_{F1} - F_{F1}\cdot\cos\varphi$$

mit $\Theta_s = \frac{1}{2}ma^2$ und (5) folgt

$$\frac{3}{2}ma\ddot{\varphi} = -c_{ges}\,a\varphi - c_1\,(a\varphi + a\sin\varphi)(1+\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{2}{3m}\left[\frac{(c_2+c_3)\cdot c_4}{c_2+c_3+c_4}\,\varphi + c_1\,(\varphi + \sin\varphi)\cdot(1+\cos\varphi)\right] = 0}$$

Nachdem die nichtlineare Bewegungsdgl. aufgestellt ist, dürfen wir diese nun bei Zugrundelegung kleiner Auslenkungen (Winkel) linearisieren:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &\approx \varphi \\ \cos\varphi &\approx 1 \end{aligned}\right] \text{— gilt nur für Linearisierungen um } \varphi_0 = 0$$

$$\varphi\cdot\cos\varphi \approx \varphi$$
$$\sin\varphi\cdot\cos\varphi \approx \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{2}{3m}\left[\frac{(c_2+c_3)\cdot c_4}{c_2+c_3+c_4} + 4c_1\right]\varphi = 0} \quad (7)$$

Linearisierte Bewegungsdgl.

Mit den Vorgaben $c_1 = c_2 = c$; $c_3 = \frac{c}{2}$; $c_4 = 3c$ ergibt sich:

$$\underline{\underline{\ddot{\varphi} + \frac{10}{3}\frac{c}{m}\varphi = 0}} \quad (8)$$

Ermittlung der Eigenkreisfrequenz:

Ansatz: $\varphi(t) = A e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{\varphi} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} \lambda^2 + \frac{10}{3}\frac{c}{m} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{10}{3}\frac{c}{m}} =: \pm i\omega_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + A_2 \cdot \sin(\omega_0 t)}} \quad (9)$$

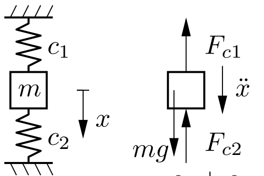
Die Lösung stellt eine harmonische Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{3}\frac{c}{m}}$ dar!

Mit dem Wissen, dass der Koeffizient vor φ stets ω_0^2 darstellt, kann man diese natürlich direkt angeben!

Hausaufgaben

Aufgabe 136

(a)



$F_{c1} = c_1 x$, $F_{c2} = c_2 x$

Schwerpunktsatz:

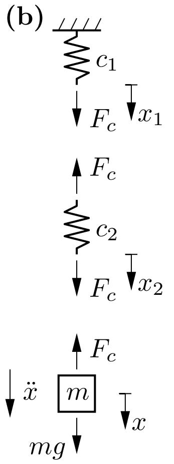
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - F_{c1} - F_{c2} \\ &= mg - (c_1 + c_2)x \end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m} x = g \qquad \text{Schwingungs-DGL}$$

$$\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} \qquad \text{Eigenkreisfrequenz}$$

Parallelschaltung der Federn $\Rightarrow$ Addition der Steifigkeiten.

(b)



x_1 und x_2 sind die Veränderungen der Federlänge ggü. dem entspannten Zustand, x ist die Auslenkung der Masse m:

$$x = x_1 + x_2$$

$$F_c = -c_1 x_1 \,, \qquad \frac{F_c}{c_1} = -x_1$$

$$F_c = -c_2 x_2 \,, \qquad \frac{F_c}{c_2} = -x_2$$

$$\hookrightarrow -x = \frac{F_c}{c_1} + \frac{F_c}{c_2}$$

$$F_c = cx \text{ mit } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Schwerpunktsatz:

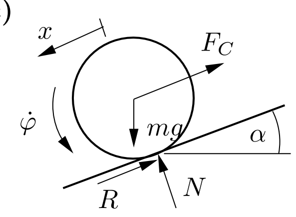
$$m\ddot{x} = mg - F_c = mg - cx$$

$$\hookrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m} x = g$$

$$\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}}$$

Reihenschaltung von Federn $\Rightarrow$ Addition der Nachgiebigkeiten (=inversen Steifigkeiten).

(c)



Drehimpulssatz:
$\theta_S \ddot{\varphi} = aR$

Schwerpunktsatz:
$m\ddot{x} = mg \sin\alpha - R - F_c$

Kinematik (reines Rollen):
$x = a\varphi$

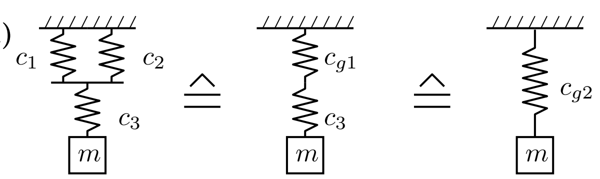
Alles einsetzen ($\theta_S = \frac{1}{2} m a^2$):

$$\left(m + \frac{\theta_S}{a^2}\right)\ddot{x} + cx = mg\sin\alpha$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = C$$

$$\text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m + \theta_S/a^2}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} \,.$$

(d)



$$c_{g1} = c_1 + c_2$$

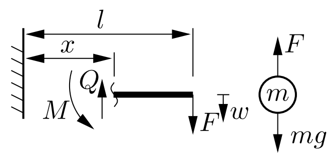
$$\frac{1}{c_{g2}} = \frac{1}{c_{g1}} + \frac{1}{c_3} \qquad \Rightarrow c_{g2} = \frac{c_3(c_1 + c_2)}{c_1 + c_2 + c_3}$$

Und in Analogie zu den vorigen Aufgabenteilen erhält man:

$$m\ddot{x} + c_{g2} x = mg$$

$$\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c_{g2}}{m}}$$

(e)



Balken-Biegelinie:

$$EIw''(x) = -M = F(l - x)$$

$$w'(x) = \int_0^x w'' dx + w'(0) = \frac{F}{EI}(lx - \frac{x^2}{2})$$

$$w(x) = \int_0^x w' dx + w(0) = \frac{F}{EI}[l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}]$$

$$w(l) = \frac{Fl^3}{3EI} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3EI}{l^3} w$$

Auf die Kugel wirkt die Gegenkraft, zweites Newtonsches Gesetz:

$$m\ddot{w} = -\frac{3EI}{l^3} w + mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{w} + \frac{3EI}{ml^3} w = g$$

$$\hookrightarrow \text{ Eigenkreisfrequenz: } \omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{ml^3}}$$

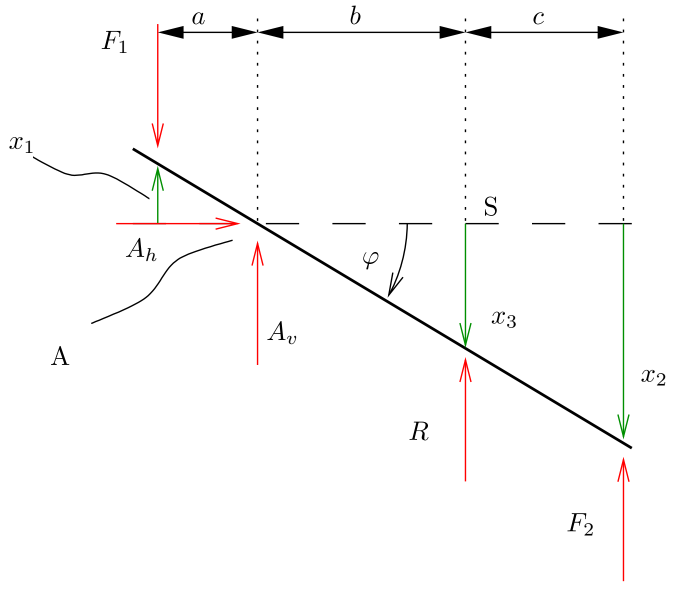
Beachte: Der Balken muß masselos angenommen werden.

Aufgabe 138

(a) Drehimpulssatz um den Punkt A (der auf der zeitlich festen Drehachse liegt):

$$\theta_A \ddot{\varphi} = -F_1 a - F_2(b + c) - Rb \qquad (1)$$

$$(\theta^S + mb^2)\ddot{\varphi} = -F_1 a - F_2(b + c) - Rb \qquad (2)$$



Kinematik (bei kleinem Drehwinkel φ):

$$x_1 = a\varphi \tag{3}$$
$$x_2 = (b+c)\varphi \tag{4}$$
$$x_3 = b\varphi \Rightarrow \dot{x}_3 = b\dot{\varphi} \tag{5}$$

Kraftgesetze:

$$F_1 = k_1 x_1 = k_1 a\varphi \tag{6}$$
$$F_2 = k_2 x_2 = k_2(b+c)\varphi \tag{7}$$
$$R = d\dot{x}_3 = db\dot{\varphi} \tag{8}$$

Zusammenfassen:

$$\left(\theta^S + mb^2\right)\ddot{\varphi} + k_1 a^2\varphi + k_2(b+c)^2\varphi + db^2\dot{\varphi} = 0 \tag{9}$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{db^2}{\theta^S + mb^2}\dot{\varphi} + \frac{k_1 a^2 + k_2(b+c)^2}{\theta^S + mb^2}\varphi = 0 \tag{10}$$

(b) Die allgemeine Form der Schwingungsdifferentialgleichung einer freien gedämpften Schwingung lautet:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{11}$$

Sie hat bei schwacher Dämpfung $\delta^2 < \omega_0^2$ die Lösung:

$$x(t) = e^{-\frac{2\delta}{2}t}\left(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t\right) \tag{12}$$

mit der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \ , \tag{13}$$

die bei verschwindender Dämpfung $\delta \to 0$ übergeht in die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0.

Ein Koeffizientenvergleich von (10) mit (11) ergibt:

$$2\delta = \frac{db^2}{\theta^S + mb^2} \tag{14}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 a^2 + k_2(b+c)^2}{\theta^S + mb^2}} \tag{15}$$
$$\omega^* = \sqrt{\frac{k_1 a^2 + k_2(b+c)^2}{\theta^S + mb^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{db^2}{\theta^S + mb^2}\right)^2} \tag{16}$$

Gleichung (15) gibt die gesuchte ungedämpfte und Gleichung (16) die gedämpfte Eigenfrequenz an.

(c) Eine Schwingung stellt sich nur bei „schwacher Dämpfung" ein, wenn $\delta^2 < \omega_0^2$:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{db^2}{\theta^S + mb^2}\right)^2 < \frac{k_1 a^2 + k_2(b+c)^2}{\theta^S + mb^2} \tag{17}$$

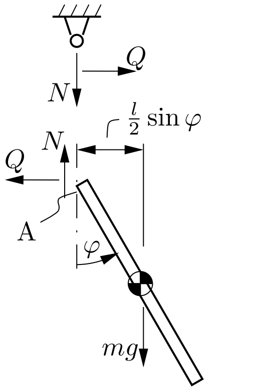
Spezialfall $k_1 = 2k_2$, $a = b = c$:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{da^2}{\theta^S + ma^2}\right)^2 < \frac{6k_2 a^2}{\theta^S + ma^2}$$
$$d^2 < \frac{24}{a^2}(\theta^S + ma^2)k_2 \tag{18}$$

muß demnach gelten, damit das System schwingt.

Aufgabe 139

(a)



Drehimpulssatz um A:

$$\Theta^A\ddot{\varphi} = -\frac{l}{2}\sin\varphi mg$$

Massenträgheitsmoment mit Steinerschem Satz:

$$\Theta^A = \Theta^S + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

So ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{19}$$

(b) Linearisierung:

Aus der Taylorentwicklung der Funktion $f(x)$ um $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0)\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

erhalten wir für kleine x die Näherung

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)x \ .$$

Die Näherung ist eine lineare Funktion, deshalb spricht man von Linearisieren.

Ganz analog erhält man für eine Funktion mehrerer Veränderlicher $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die lineare Näherung um $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$:

$$f(x_1, x_2, \ldots) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \tag{20}$$

Die nichtlineare Diff'gl. (19) hat die Form $D(\ddot{\varphi}, \varphi) = 0$. Dabei fassen wir D auf als (nichtlineare) Funktion der unabhängigen Variablen φ und $\ddot{\varphi}$.

Diese Funktion D soll nun gemäß Gl. (20) linearisiert werden. Man kann leicht zeigen, daß man dazu nur die nichtlinearen Summanden von D linearisieren muß und zwar jeden für sich. Hier muß also lediglich $\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi$ um $\varphi = 0$ linearisiert werden.

Sehr oft benötigt wird eine Linearisierung der trigonometrischen Funktionen für kleine Winkel um den Winkel Null:

$$\sin x \approx \sin(0) + \cos(0)\cdot x = x$$
$$\cos x \approx \cos(0) - \sin(0)\cdot x = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx x$$

Aus der DGL (19) wird damit

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\varphi = 0 \tag{21}$$

(c) Der Ansatz $\varphi = Ce^{\lambda t}$ bzw. $\ddot{\varphi} = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$ eingesetzt in die DGL (21) ergibt:

$$\left(\lambda^2 + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\right) C e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{3}{2}\frac{g}{l} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}} =: \pm i\omega_0$$

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$\varphi = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{22}$$

Umformung mittels $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned}\varphi &= C_1 \left(\cos\omega_0 t + i \sin\omega_0 t\right) + C_2 \left(\cos\omega_0 t - i \sin\omega_0 t\right)\\ &= (C_1 + C_2)\cos\omega_0 t + (C_1 - C_2) i \sin\omega_0 t\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi = A\cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t \tag{23}$$

Bereits (22) ist eine allg. Lösung, welche man den speziellen Anfangsbedingungen anpassen könnte. Üblicher ist jedoch die Nutzung von (23), da der imaginäre Exponent bereits berücksichtigt wurde.
Bestimmen der Koeffizienten A und B durch Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad A = \varphi_0$$
$$\dot\varphi(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Die Lösung für die speziellen Anfangsbedingungen lautet damit:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) \tag{24}$$

(d) Die (ungedämpfte) Eigenkreisfrequenz bei einem System mit der Bewegungsdifferentialgleichung $\ddot\varphi + \omega_0^2\varphi = 0$ lautet ω_0. In unserem Fall ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$.