Tutorium

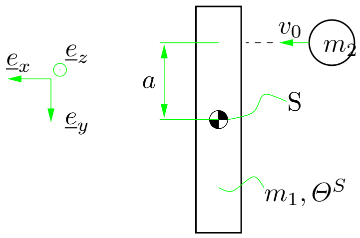
Aufgabe 69

(a) Zur Unterscheidung der Größen vor und nach dem Stoß wollen wir sie jeweils mit dem Index v bzw. n versehen: $(\cdot)_v$ bezeichnet eine Größe vor und $(\cdot)_n$ eine Größe nach dem Stoß.

Da auf das System aus Kugel und Klotz während des Stoßvorgangs keine äußeren Kräfte $\underline{F}$ wirken, bleibt der Impuls $\underline{p}$ konstant:

$$\dot{\underline{p}} = \sum \underline{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{p}_v = \underline{p}_n \tag{1}$$

Wir wollen folgende Vektorbasis einführen:



$$\underline{p}_v = 0 + m_2 v_0 \underline{e}_x \tag{2}$$

$$\underline{p}_n = m_1(v_{S,n}\underline{e}_x + \tilde{v}_n \underline{e}_y) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 v_0 = m_1 v_{S,n} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{S,n} = \frac{m_2}{m_1} v_0}, \quad \tilde{v}_n = 0 \tag{5}$$

Der Drehimpuls des Systems bzgl. eines beliebigen Punktes bleibt ebenfalls erhalten. Wähle als Bezugspunkt den Punkt S:

$$\dot{\underline{L}}^{\mathrm{S}} = \sum M^{\mathrm{S}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{L}_v^{\mathrm{S}} = \underline{L}_n^{\mathrm{S}} \tag{6}$$

$$\underline{L}_v^{\mathrm{S}} = \Theta^S \cdot 0 + (-a\underline{e}_y) \times m_2 v_0 \underline{e}_x = a m_2 v_0 \underline{e}_z \tag{7}$$

$$\underline{L}_n^{\mathrm{S}} = \Theta^S \omega \underline{e}_z + (-a\underline{e}_y) \times m_2 \cdot 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad a m_2 v_0 = \Theta^S \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{a m_2}{\Theta^S} v_0} \tag{9}$$

Bemerkung: Aus Symmetriegründen bleibt die Drehgeschwindigkeit einer homogenen Kugel beim geraden Stoß erhalten. Ein gerader Stoß ist ein Stoß, bei dem die Relativgeschwindigkeit der Kontaktpunkte parallel zur Stoßnormalen (= Senkrechte auf den Oberflächen im Kontaktpunkt) ist.

(b) Die Energie bleibt erhalten:

$$E_v = E_n \tag{10}$$

$$E_v = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 \tag{11}$$

$$E_n = \frac{1}{2}\Theta^S \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{S,n}^2 \tag{12}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{m_2}{m_1} m_2 v_0^2 \quad \text{(mit den Ergebnissen aus Teil a)} \tag{13}$$

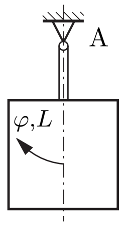
Eingesetzt in Gl.(10) ergibt sich:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = 3} \tag{14}$$

Aufgabe 72

(a) keine äußeren Momente bezüglich des Lagerpunktes A

$\rightarrow$ Drehimpuls um A bleibt erhalten:



$$\frac{\partial}{\partial t} L^A = 0$$

$$\Rightarrow L^A_{\text{vorher}} = L^A_{\text{nachher}}$$

$$\text{mit } L^A_{\text{vorher}} = m_2 v_0 l$$

$$L^A_{\text{nachher}} = m_2 v_1 l + \Theta^A \dot{\varphi}$$

$$\text{und } \Theta^A = \Theta^S + m_1 l^2$$

$$\Rightarrow m_2 v_0 l = m_2 v_1 l + \Theta^A \dot{\varphi}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{\Theta^A}{m_2 l}\dot{\varphi} \tag{15}$$

Beim ideal elastischen Stoß bleibt die Energie erhalten:

$$K_{vorher} = K_{nachher}$$

$$\text{mit } T_{vorher} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$$

$$T_{nachher} = \frac{1}{2} m_2 v_1^2 + \frac{1}{2}\Theta^A \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow m_2 v_0^2 = m_2 v_1^2 + \Theta^A \dot{\varphi}^2$$

Einsetzen von Gl.(15) ergibt:

$$m_2 v_0^2 = m_2 \left(v_0 - \frac{\Theta^A}{m_2 l}\dot{\varphi}\right)^2 + \Theta^A \dot{\varphi}^2$$

$$= m_2 v_0^2 - 2 m_2 v_0 \frac{\Theta^A}{m_2 l}\dot{\varphi} + m_2 \frac{{\Theta^A}^2}{m_2^2 l^2}\dot{\varphi}^2 + \Theta^A \dot{\varphi}^2$$

$$\Theta^A \left(\frac{\Theta^A}{m_2 l^2} + 1\right)\dot{\varphi}^2 - 2 m_2 v_0 \frac{\Theta^A}{m_2 l}\dot{\varphi} = 0$$

$$\text{uninteressante Lösung: } \dot{\varphi} = 0$$

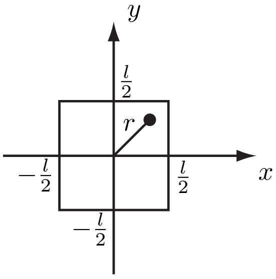
$$\text{sonst: } \dot{\varphi} = \frac{2 m_2 v_0 \Theta^A}{m_2 l \Theta^A \left(\frac{\Theta^A}{m_2 l^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{2 m_2 l v_0}{\Theta^A + m_2 l^2}$$

$$\text{mit } \Theta^A = \Theta^S + m_1 l^2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2m_2 l v_0}{\Theta^S + m_1 l^2 + m_2 l^2}$$

(b)



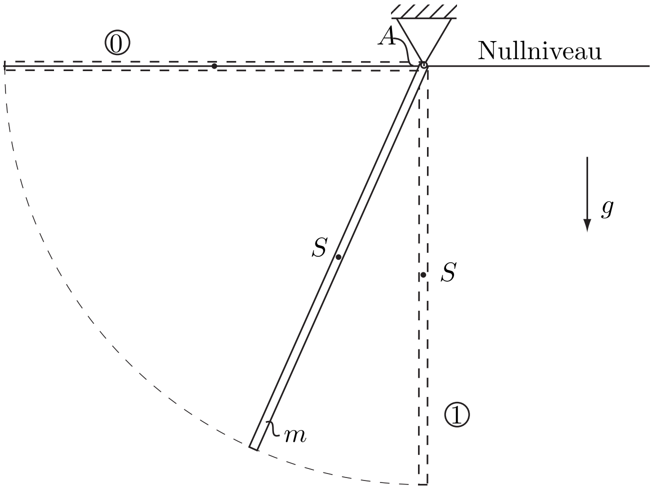
$$\Theta^S = \int_m r^2\, dm$$
$$\text{mit } r^2 = x^2 + y^2$$
$$\text{und } dm = \rho l\, dx\, dy$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Theta^S &= \rho l \int_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\
&= \rho l \int_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}} dy \\
&= \rho l \int_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}} \left(\frac{2l^3}{24} + \frac{2l}{2} y^2\right) dy \\
&= \rho l \left[\frac{l^3}{12} y + \frac{l}{3} y^3\right]_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}} = \rho l \left[\frac{2l^4}{24} + \frac{2l^4}{24}\right] \\
&= \frac{1}{6}\rho l^5 = \frac{1}{6} m l^2
\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 77

(a) Gesucht: $\dot{\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{!}{=} \dot{\varphi}^-$ unmittelbar vor dem Stoß.



Energiesatz:

$$U_0 + T_0 = U_1 + T_1 \tag{16}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} U_0 &= 0 \qquad \text{(NN)} \\ T_0 &= 0 \qquad \text{(AB)} \end{aligned}$$

$$U_1 = U\left(\frac{\pi}{2}\right) = -mg\frac{l}{2} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{m}{2} v_S^2 + \frac{\Theta^{(S)}}{2} (\dot{\varphi}^-)^2 \\
&= \frac{m}{2}\frac{l^2}{4} (\dot{\varphi}^-)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m l^2 (\dot{\varphi}^-)^2 \\
&= \frac{1}{6} m l^2 (\dot{\varphi}^-)^2
\end{aligned} \tag{18}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} v_S &= \frac{l}{2}(\dot{\varphi}^-) \qquad \text{und} \\ \Theta^{(S)} &= \frac{1}{12} m l^2 \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie T_1 kann man auch mit einer reinen Drehung um A rechnen. Es gilt mit dem Satz von Steiner:

$$\begin{aligned}
\Theta^{(A)} &= \frac{1}{12} m l^2 + m\frac{l^2}{4} \\
&= \frac{1}{3} m l^2
\end{aligned} \tag{19}$$

Und damit:

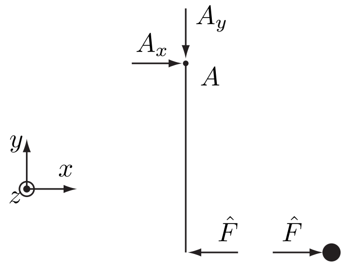
$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\Theta^{(A)}}{2} (\dot{\varphi}^-)^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3} m l^2 (\dot{\varphi}^-)^2 \\
&= \frac{1}{6} m l^2 (\dot{\varphi}^-)^2
\end{aligned} \tag{20}$$

Alles eingesetzt in (16):

$$0 = -mg\frac{l}{2} + \frac{1}{6}ml^2(\dot{\varphi}^-)^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}^- = \sqrt{\frac{3}{l}g} \tag{21}$$

(b) Freischnitte beim Stoß:



Auf beide Körper wirkt beim Stoß der gleiche Kraftstoß $\hat{F}$. Es gilt für die z-Komponente des Drallsatzes (für das Pendel) sowie für die x-Komponente des Impulssatzes (für die Punktmasse):

$$\Theta^{(A)}(\omega^+ - \omega^-) = -\hat{F}l \tag{22}$$

$$M(v^+ - v^-) = \hat{F} \tag{23}$$

Mit

$$\Theta^{(A)} = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} \tag{24}$$

$$= \frac{1}{3}ml^3 \tag{25}$$

$$v^+ = \omega^+ l \tag{26}$$

$$\omega^- = \sqrt{\frac{3}{l}g} \tag{27}$$

$$v^- = -v_0 \tag{28}$$

Alles in (22) einsetzen:

$$\frac{1}{3}ml^2\left(\omega^+ - \sqrt{\frac{3}{l}g}\right) = -Ml(\omega^+ l + v_0) \tag{29}$$

$$\left(\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2\right)\omega^+ = \frac{1}{3}ml^2\sqrt{\frac{3}{l}g} - Mlv_0 \tag{30}$$

$$\Rightarrow \omega^+ = \frac{\frac{1}{3}ml^2\sqrt{\frac{3}{l}g} - Mlv_0}{\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2} \tag{31}$$

<u>Alternativweg:</u>

Gesucht: $\dot{\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \overset{!}{=} \dot{\varphi}^+$ unmittelbar nach dem Stoß.
Es gilt die Drehimpulserhaltung:

$$L^{A^-} = L^{A^+} \tag{32}$$

Der Drall vor dem Stoß:

$$L^{A^-} = \Theta^A\dot{\varphi}^- - Mlv_0$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\sqrt{\frac{3}{l}g} - Mlv_0 \tag{33}$$

Der Drall nach dem Stoß:

$$L^{A^+} = \Theta^A\dot{\varphi}^+ + Ml^2\dot{\varphi}^+$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^+ + Ml^2\dot{\varphi}^+$$

$$= \dot{\varphi}^+ l^2\left(\frac{1}{3}m + M\right) \tag{34}$$

(33) und (34) eingesetzt in (32):

$$\frac{1}{3}ml^2\sqrt{\frac{3}{l}g} - Mlv_0 = \dot{\varphi}^+ l^2\left(\frac{1}{3}m + M\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}^+ = \frac{\frac{1}{3}ml^2\sqrt{\frac{3}{l}g} - Mlv_0}{l^2\left(\frac{1}{3}m + M\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}m\sqrt{\frac{3}{l}g} - \frac{1}{l}Mv_0}{\frac{1}{3}m + M} \tag{35}$$

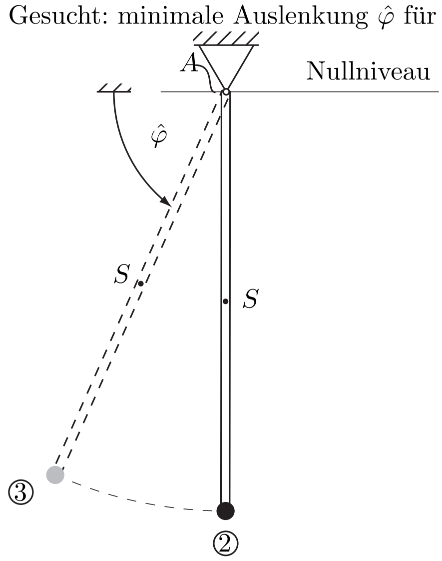
(c) Gesucht: Bedingung des Zurückschlagens. Es muss also $\dot{\varphi}^+ < 0$ gelten.

$$0 > \frac{\frac{1}{3}m\sqrt{\frac{3}{l}g} - \frac{1}{l}Mv_0}{\frac{1}{3}m + M}$$

$$0 > \frac{1}{3}m\sqrt{\frac{3}{l}g} - \frac{1}{l}Mv_0$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} > \sqrt{\frac{lg}{3v_0^2}} \tag{36}$$

Gesucht: minimale Auslenkung $\hat{\varphi}$ für diesen Fall.



Energiesatz:

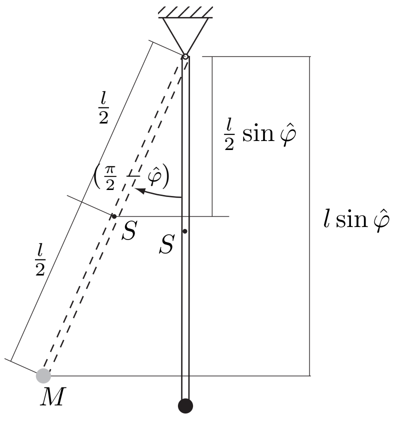
$$U_2 + T_2 = U_3 + T_3 \tag{37}$$

$$U_2 = -mg\frac{l}{2} - Mgl \tag{38}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\Theta^A + Ml^2\right)\cdot(\dot{\varphi}^+)^2 \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2 + Ml^2\right)\cdot(\dot{\varphi}^+)^2$$

$$= \frac{1}{6}l^2(m + 3M)\cdot(\dot{\varphi}^+)^2 \tag{40}$$



$$U_3 = -mg\frac{l}{2}\sin\hat{\varphi} - Mgl\sin\hat{\varphi} \tag{41}$$

$$T_3 = 0 \tag{42}$$

Damit wird (37) zu:

$$\begin{aligned} -mg\frac{l}{2} - Mgl + \frac{1}{6}l^2(m+3M)\cdot(\dot{\varphi}^+)^2 \\ = \left(-mg\frac{l}{2} - Mgl\right)\sin\hat{\varphi} \\ \Rightarrow \hat{\varphi} = \arcsin\left(\frac{-mg\frac{l}{2} - Mgl + \frac{1}{6}l^2(m+3M)\cdot(\dot{\varphi}^+)^2}{-mg\frac{l}{2} - Mgl}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 78

(a) Allgemeine Formel für das Massenträgheitsmoment bezüglich des Koordinatenursprungs A (ebenes Problem):

$$\Theta^A = \int_m r^2 dm \tag{43}$$

Wähle als infinitesimales Massenelement (mit dem Abstand r vom Ursprung) einen Quader über die gesamte Scheibendicke t:[1]

$$dm = \rho\, t\, dx\, dy \tag{44}$$

$$\Theta^A = \rho t \int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{3}}{2}l} \int_{y=y_u(x)}^{y=y_o(x)} (x^2+y^2)\, dy\, dx \tag{45}$$

$$= \rho t \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y_u(x)}^{y_o(x)} dx \tag{46}$$

$$y_o(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad , \qquad y_u(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \tag{47}$$

$$\Theta^A = \rho t \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \frac{\sqrt{3}}{3}\left[2 + \frac{2}{9}\right] x^3\, dx \tag{48}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{48}\rho t l^4 \tag{49}$$

Einheitenkontrolle:

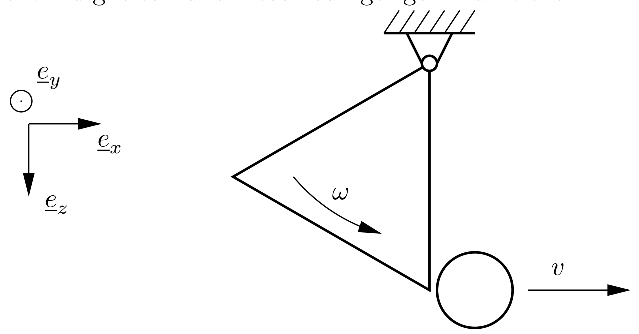
$$\left[\rho t l^4\right] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ \text{m}\ \text{m}^4 = \text{kg m}^2 \tag{50}$$

...und das ist offensichtlich (siehe Gl. (43)) die richtige Einheit für das Massenträgheitsmoment.

(b) Bezeichnungen:

vor dem Stoß	$\omega_0 \neq 0, v_0 = 0$
nach dem Stoß	ω_1, v_1

Annahme: Das Zeitintervall Δt in dem der Stoß stattfindet ist so kurz, daß die Lageänderung des Systems vernachlässigt werden kann. Das heißt nicht, daß die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Null wären.



Drehimpulserhaltung:

$$L_0^A = L_1^A \tag{51}$$

$$\Theta^A\omega_0 = \Theta^A\omega_1 + mv_1 l \tag{52}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{mv_1 l}{\Theta^A} \tag{53}$$

Energie des Systems vor und nach dem Stoß (gilt in dieser Form nur, weil A der Momentanpol der Scheibe ist):

$$E_{\text{ges},0} = \frac{1}{2}\Theta^A\omega_0^2 \tag{54}$$

$$E_{\text{ges},1} = \frac{1}{2}\Theta^A\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{55}$$

Die Energie soll erhalten bleiben (ideal elastischer Stoß):

$$E_{\text{ges},0} = E_{\text{ges},1} \tag{56}$$

$$\hookrightarrow \omega_0^2 = \omega_1^2 + \frac{m}{\Theta^A}v_1^2 \tag{57}$$

Mit (53) in (57) läßt sich die Unbekannte ω_1 eliminieren:

$$(ml^2 + \Theta^A)v_1^2 - 2\Theta^A l\omega_0 v_1 = 0 \tag{58}$$

Eine Lösung ist $v_1 = 0$. Das entspricht dem Fall, daß kein Stoß stattfindet.

Die zweite Lösung ist die gesuchte:

$$v_1 = 2\frac{\Theta^A l}{ml^2 + \Theta^A}\omega_0 \tag{59}$$

---

[1] Das ist möglich, weil alle Punkte des Massenelements dm den gleichen Abstand $r = \sqrt{x^2+y^2}$ von der z-Achse durch den Bezugspunkt A haben.