9. Übung

1. Arbeitssatz für Starrkörper (-systeme)

Die von den äußeren Kräften und freien Momenten zwischen 2 Lagen eines starren Körpers verrichtete äußere Arbeit entspricht der Differenz der kinetischen Energien des Körpers in den beiden Lagen.

$$K_2 - K_1 = W_{12} = \sum_{i=1}^{m} \int_{①}^{②} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{j=1}^{n} \int_{①}^{②} \vec{M}_{0j} \cdot d\vec{\varphi} \qquad (1)$$

Wie bei den MP-Systemen kann die Arbeit der konservativen Kräfte und Momente über eine Potenzialdifferenz dargestellt werden. => Alternative Form des Arbeitssatzes:

$$K_2 + U_2 - K_1 - U_1 = W_{12}^{n.k.} \qquad (2)$$

$W_{12}^{n.k.}$: Arbeit der nicht konservativen Kräfte und Momente

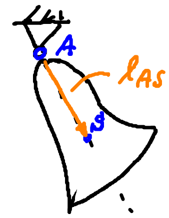
2. Kinetische Energie des Starrkörpers

$$K = \underline{\frac{1}{2} m \vec{v}_S \cdot \vec{v}_S} + \underline{\frac{1}{2} \theta_S \cdot \omega^2} \qquad (3)$$

Die kinetische Energie der ebenen Bewegung eines Starrkörpers setzt sich aus einer Translationsenergie mit Schwerpunktgeschwindigkeit und der Energie aufgrund der Rotation um den Schwerpunkt zusammen!

Bei Rotation um einen festen Punkt A [raumfest] gilt auch:

$$K = \frac{1}{2} \theta_A \omega^2 \qquad (4)$$



Reine Rotation um A!

$$\theta_A = \theta_S + m\, l_{AS}^2$$

(Satz von Steiner)

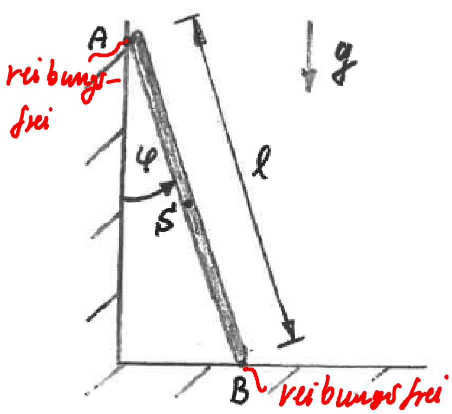
3. Energieerhaltung

Für $W_{12}^{n.k} = 0$ folgt aus (2)

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 = \text{Const.} \qquad (5)$$

Erweiterte Aufgabe aus der Vorlesung

Ein homogener Stab der Länge l, Masse m gleitet an einer glatten Wand und der Unterlage reibungsfrei ab. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ steht der Stab senkrecht und erst durch eine kleine Störung beginnt er aus der Ruhelage heraus abzugleiten.

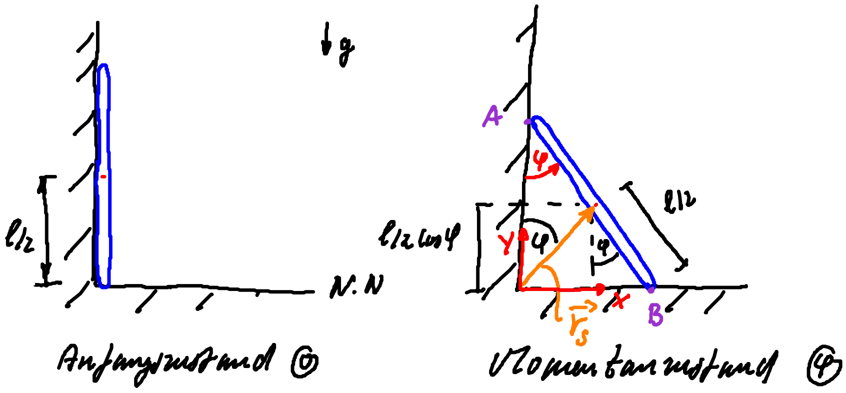


(a) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit des Stabes als Funktion des Winkels mit dem Energieerhaltungssatz.

(b) Ermitteln Sie die Winkelbeschleunigung als Funktion des Winkels

(c) Berechnen Sie die Normalkräfte in den Punkten A und B und diskutieren Sie die Ergebnisse

(d) Gesucht: $\dot{\varphi}(\varphi)$



<u>Energieerhaltung ⓪ → ⓟ</u>

$$K_0 + U_0 = K_\varphi + U_\varphi$$

$$0 + mg\, l/2 = \frac{1}{2}\Theta_S \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + \underline{mg\, l/2 \cos\varphi} \qquad (1)$$

<u>Kinematik:</u>
$$\vec{r}_S = \frac{l}{2}\sin\varphi\, \vec{e}_x + \frac{l}{2}\cos\varphi\, \vec{e}_y$$
$$\vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S = \frac{l}{2}\cos\varphi \cdot \dot\varphi\, \vec{e}_x - \frac{l}{2}\sin\varphi\, \dot\varphi\, \vec{e}_y \qquad (2)$$
$$\vec{a}_S = \underbrace{\left(-\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{l}{2}\cos\varphi\,\ddot\varphi\right)}_{a_x = \ddot{x}_S}\vec{e}_x - \underbrace{\left(\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{l}{2}\sin\varphi\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_y}_{a_y = \ddot{y}_S} \qquad (3)$$

<u>N.R.</u> $v_S^2 = \vec{v}_S \cdot \vec{v}_S = \left(\frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi\right)^2 + \left(-\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi\right)^2 = \underline{\underline{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \dot\varphi^2}} \qquad (4)$

(4) in (1) $\Rightarrow$ $mg\, l/2\,(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}\Theta_S\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2$ mit $\Theta_S = \frac{1}{12} m l^2$

$$mg\, l/2\,(1-\cos\varphi) = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{8} m l^2\right)\dot\varphi^2$$
$$\frac{1}{6}\cancel{m}\, l^{\cancel{2}\,1}\dot\varphi^2 = \cancel{m} g\, \cancel{l}/2\,(1-\cos\varphi)$$
$$\underline{\dot\varphi^2(\varphi) = 3\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot\varphi(\varphi) = (\pm)\sqrt{3\frac{g}{l}(1-\cos\varphi)}} \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\dot\varphi)^2\right] = 2(\dot\varphi)^1 \frac{d\dot\varphi}{dt}$$

(b) Gesucht: $\ddot\varphi(\varphi)$

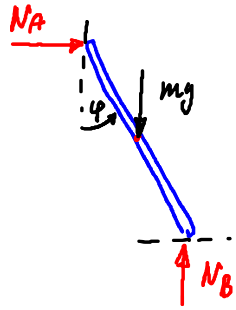
Ableitung von (5) nach der Zeit $\Rightarrow$ $2\cancel{\dot\varphi(\varphi)}\cdot\ddot\varphi = 3\frac{g}{l}\sin\varphi\,\cancel{\dot\varphi}$

$$\boxed{\ddot\varphi = \frac{3g}{2l}\sin\varphi} \qquad (7)$$

(c) Gesucht: Normalkräfte

<u>Freischnitt:</u>

<u>Schwerpunktsatz:</u>



$$m\ddot{x}_s = \sum F_x = N_A$$
$$m\ddot{y}_s = \sum F_y = N_B - mg$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} N_A &= m\ddot{x}_s \\ N_B &= m\ddot{y}_s + mg \end{aligned}\right\} (8)$$

$$(3) \text{ in } (8) \Rightarrow \left.\begin{aligned} N_A &= m\frac{\ell}{2}\left(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \\ N_B &= -m\frac{\ell}{2}\left(\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}\right) + mg \end{aligned}\right\} (9)$$

Einsetzen von (5) und (7) liefert:

$$N_A = m\frac{\cancel{\ell}}{2}\left[-\sin\varphi\,\frac{3g}{\cancel{\ell}}(1-\cos\varphi) + \cos\varphi\cdot\frac{3g}{2\cancel{\ell}}\sin\varphi\right]$$

$$N_A = m\frac{3}{2}g\sin\varphi\left(-1+\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos\varphi\right) = mg\frac{3}{4}\cdot\sin\varphi\,\underbrace{(3\cos\varphi-2)}_{\text{Das kann negativ werden!}}$$

N_B analog! ...

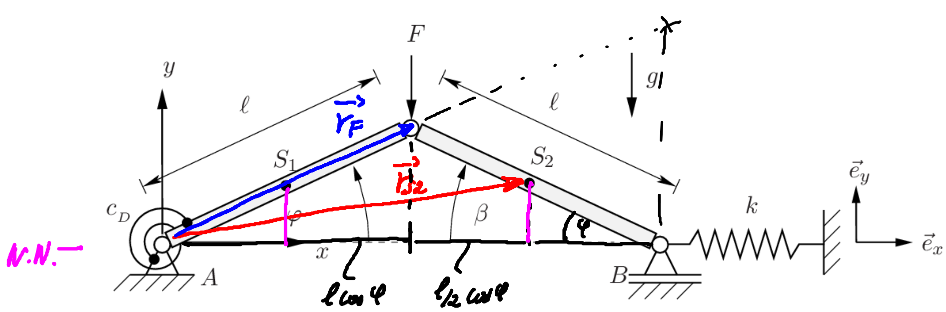
Diskussion: Die Leiter hat nur so lange Kontakt zur Wand wie $N_A \geq 0$ ist $[0 \leq \varphi \leq \pi/2]$

$$\Rightarrow 3\cos\varphi - 2 \geq 0$$
$$\cos\varphi \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi_G = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx \underline{\underline{48{,}2^\circ}}$$

Für $\varphi > \varphi_G = 48{,}2^\circ$ verliert die Leiter den Kontakt zur Wand!

... es sei denn man führt die Leiter durch ein Loslager/Gleitlager!

105. Das skizzierte System besteht aus zwei gleichen, homogenen Stäben, die gelenkig miteinander verbunden sind und über ein Festlager im Punkt A und ein Loslager im Punkt B an die Umgebung gekoppelt sind. Eine lineare Drehfeder der Steifigkeit c_d verbindet Punkt A mit dem linken Stab, des Weiteren ist der Punkt B über eine lineare Längsfeder der Steifigkeit k mit der Umgebung verbunden. Im Verbindungspunkt der beiden Stäbe greift eine konstante vertikale Kraft F an. Die Stäbe haben die Länge ℓ, die Masse m und je das Massenträgheitsmoment Θ_s bezüglich ihrer Schwerpunkte S_1 und S_2. Reibung sei nicht vorhanden. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ sind beide Federn entspannt und es gelten die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0 = 30^\circ$ und $\dot{\varphi}(0) = 0\frac{1}{\mathrm{s}}$.



(a) Die Abbildung zeigt einen momentanen Bewegungszustand ($\varphi < \varphi_0$). Zeigen Sie dass für die kinetische Energie des Systems

$$K_t = \left(\frac{1}{3} + \sin^2\varphi\right) m\ell^2\dot{\varphi}^2$$

gilt. Beachten Sie dabei die gegebenen Größen.

(b) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion des Winkels φ mit Hilfe des Arbeitssatzes. Die unter Aufgabenteil (a) gegebene kinetische Energie soll dabei verwendet werden.

(c) Wie groß muss die Kraft F mindestens sein, um den Durchgang der Stäbe durch die horizontale Lage zu gewährleisten? Beachten Sie dabei die gegebenen Größen und berücksichtigen Sie $c_D = \frac{72}{\pi^2}k\ell^2$.

Geg.: ℓ, m, $\Theta_s = \frac{1}{12}m\ell^2$, g, k, c_D, F, $\varphi(0) = \varphi_0 = 30°$, $\dot{\varphi}(0) = 0\frac{1}{\mathrm{s}}$

(a) Kinetische Energie

$$K_\varphi = \frac{1}{2}\Theta_A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{S2}\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}m v_{S2}^2 \quad (1) \quad \text{mit } \dot{\beta} = \dot{\varphi}$$

N.R.: $\Theta_A = \Theta_{S1} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$

$$\vec{r}_{S2} = \frac{3}{2}\ell\cos\varphi\,\vec{e}_x + \frac{\ell}{2}\sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_{S2} = \dot{\vec{r}}_{S2} = -\frac{3}{2}\ell\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_x + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{S2}\cdot\vec{v}_{S2} = \frac{9}{4}\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{\ell^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

Einsetzen in (1) $\Rightarrow$

$$K_\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{9}{4}\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{\ell^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$K_\varphi = m\ell^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{9}{8}\sin^2\varphi + \frac{1}{8}\cos^2\varphi\right)$$

$$= m\ell^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{5}{24} + \frac{9}{8}\sin^2\varphi + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sin^2\varphi\right)$$

$$= m\ell^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\varphi\right)$$

(b) Arbeitssatz:

$$K_\varphi + U_\varphi - K_0 - U_0 = \int_{(0)}^{(\varphi)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_F$$

$$U_\varphi = 2\cdot mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}c_D\Delta\varphi^2 + \frac{1}{2}k\Delta x_B^2$$

$$= mg\ell\sin\varphi + \frac{1}{2}c_D\left(\pi/6 - \varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(2\ell\cos 30° - 2\ell\cos\varphi\right)^2$$

$$K_0 = 0$$

$$U_0 = 2mg\,\frac{l}{2}\sin 30^\circ$$

$$W_F = \int_{①}^{②} \vec{F}\cdot d\vec{r}_F \qquad \text{mit} \quad \underline{\vec{F} = -F\vec{e}_y}$$

$$\vec{r}_F = l\cos\varphi\,\vec{e}_x + l\sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$d\vec{r}_F = \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial \varphi}\,d\varphi = \underline{-l\sin\varphi\,d\varphi\,\vec{e}_x + l\cos\varphi\,d\varphi\,\vec{e}_y}$$

$$= -\int_{\pi/6}^{\varphi} F\,l\cos\tilde{\varphi}\,d\tilde{\varphi}$$

$$= -Fl\,\sin\tilde{\varphi}\Big|_{\pi/6}^{\varphi} = \underline{\underline{-Fl\left(\sin\varphi - \frac{1}{2}\right)}}$$

....

$$\underline{\dot{\varphi}(\varphi) = \underline{(+)}\sqrt{\frac{(F+mg)\,l\left(\frac{1}{2}-\sin\varphi\right) - \frac{1}{2}c_D\left(\pi/6-\varphi\right)^2 - 2kl^2\left(\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{ml^2\cdot\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)}}}$$

(c) Forderung: $\dot{\varphi}(\varphi=0) \le 0$

$$\Rightarrow \;\ldots\; F \ge -mg + kl\,(9-4\sqrt{3}) = F_{mind}$$