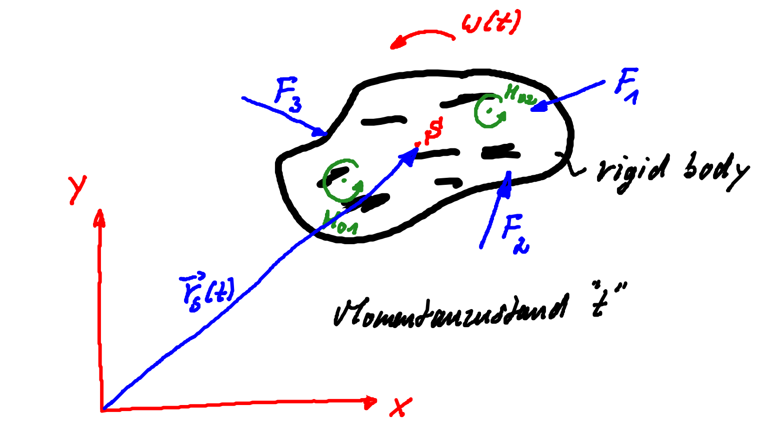
8. Übung

Infos:
- Ergebnisse des 1. Kurzfragentestes einsehbar (unter MOSES)
- Teilnahme an Lehrevaluation !

Thema: Ebene Dynamik starrer Körper

1.) Schwerpunktsatz und Drallsatz



Schwerpunktsatz:

$$m \vec{a}_S(t) = \sum \vec{F}(t)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{aligned} m \ddot{x}_S(t) &= \sum F_x(t) \quad (1) \\ m \ddot{y}_S(t) &= \sum F_y(t) \quad (2) \end{aligned}}$$

$\vec{a}_S$: Beschleunigung des Schwerpunktes

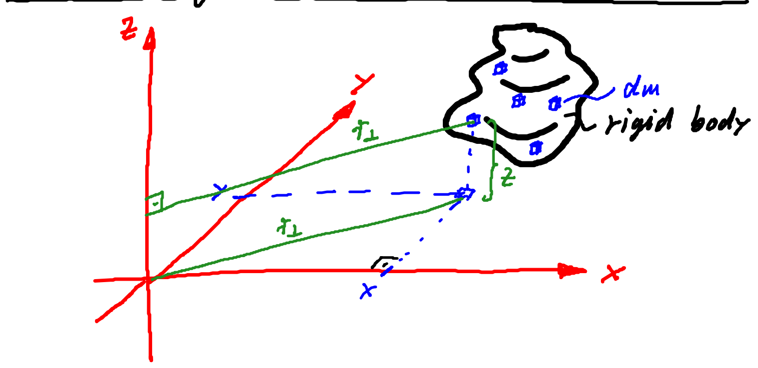
Drallsatz:

$$\Theta_S \, \dot{\omega}(t) = \sum M_z^{(S)}(t)$$

$$\boxed{\Theta_S \, \ddot{\varphi}(t) = \sum M^{(S)}} \quad (3)$$

Θ_S : Massenträgheitsmoment bzgl. des Schwerpunktes S
[genauer: bzgl. einer zur z-Achse parallelen Achse, die durch den Schwerpunkt verläuft]

2.) Berechnung des axialen Massenträgheitsmomentes



$r_\perp$: Senkrechter Abstand von dm zur z-Achse

$$r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Massenträgheitsmoment bzgl. z-Achse:

$$d\Theta_{zz} = dm \, r_\perp^2 = (x^2 + y^2)\, dm$$

$$\boxed{\Theta_{zz} = \int d\Theta_{zz} = \int_{(m)} (x^2+y^2)\, dm} \quad (4)$$

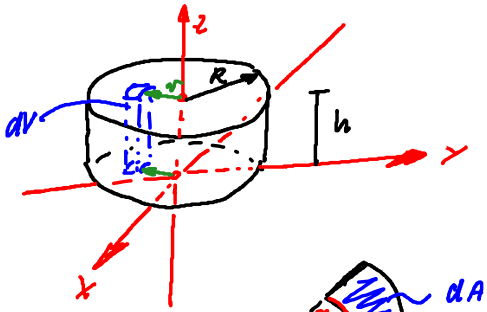
$$[\Theta_{zz}] = kg\, m^2 \quad *$$

Anmerkungen:
- Massenträgheitsmoment nimmt seinen Minimalwert an, wenn die Bezugsachse durch den Schwerpunkt verläuft
- Analog zur Berechnung von Flächenträgheitsmomenten gilt der Satz von Steiner (Parallelachsensatz):

$$\boxed{\Theta_A = \Theta_S + m \vec{r}_{SA}^{\,2} = \Theta_S + m\, r_{SA}^2}$$

r_{SA} : Abstand der parallelen Achsen

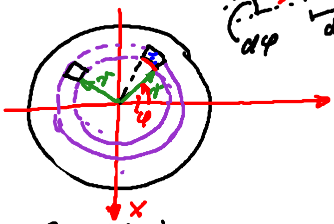
Beispiel: Massenträgheitsmoment bzgl. des Schwerpunktes eines homogenen Kreiszylinders



Gesucht: Θ_{zz}

$$\Theta_{zz} = \int (x^2+y^2)\,dm = \int (x^2+y^2)\,\rho\,dV$$
$$= \rho \int \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\,dV$$

$dA = r\,d\varphi \cdot dr$



Draufsicht

$$dV = h\,dA = h \cdot r\,d\varphi\,dr$$

$$\Theta_{zz} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\,h \cdot r\,d\varphi\,dr$$
$$= \rho\,h \int_0^R r^3\,[\varphi]_0^{2\pi}\,dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3\,dr$$
$$= 2\pi\rho h\,\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{\pi}{2}\rho\,h\,R^4 = \frac{1}{2}\underbrace{\pi R^2 h \rho}_{m} R^2$$

$$\boxed{\Theta_{zz} = \frac{1}{2} m R^2}$$

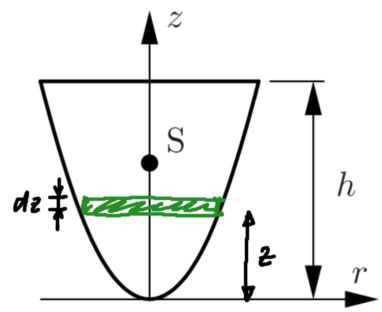
---

130. Für den um die z-Achse rotationssymmetrischen Körper mit der konstanten Dichte ρ, dessen Kontur durch die Gleichung $z = \frac{r^2}{a}$ gegeben ist, berechne man:

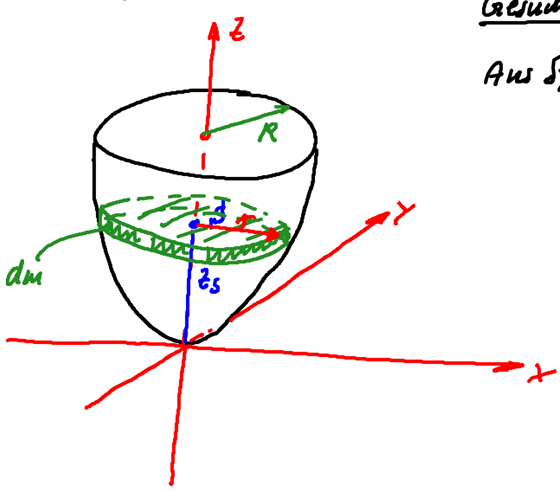
(a) die Koordinaten des Massenmittelpunktes S,

(b) das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse Θ_{zz}.

Geg.: h, a, ρ



(a) Rotationskörper



Gesucht: Koordinaten des Massenmittelpunktes

Aus Symmetriegründen: $x_s = y_s = 0$

$$z_s := \frac{\int_{(m)} z\,dm}{\int_{(m)} dm}$$

N.R.: $\int_{(m)} dm = \int_0^h \rho\,\underbrace{\pi r^2}_{A}\,dz$ $r = r(z)$

aus $z(r) = \frac{r^2}{a} \Rightarrow r(z) = \sqrt{za}$

$$m := \int_{(m)} dm = \rho\pi \int_0^h z a\,dz = \rho\pi a\,\frac{1}{2} z^2 \Big|_0^h$$

$$= \rho\pi a \frac{1}{2}h^2 = \underline{\frac{1}{2}\rho\pi a h^2}$$

$$\int z\,dm = \int_0^h z \underbrace{\rho\pi r(z)^2 dz}_{dm} = \rho\pi \int_0^h z\cdot z a\,dz = \underline{\underline{\rho\pi a \frac{1}{3}h^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_S = \frac{\rho\pi a \frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}\rho\pi a h^2} = \frac{2}{3}h}$$

(b) Massenträgheitsmoment

WH: $d\theta = \frac{1}{2}\,dm\,r^2 = \frac{1}{2}r^2\rho\pi r^2\,dz$

$$\theta_{zz} = \int d\theta_{zz} = \int_0^h \frac{1}{2}\rho\pi r^4\,dz = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h z^2 a^2\,dz$$

$$\boxed{\theta_{zz}} = \frac{1}{2}\pi\rho a^2\,\frac{1}{3}h^3 = \underbrace{\frac{1}{2}\rho\pi a h^2}_{m}\,ah\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}m a h} = \boxed{\frac{1}{3}mR^2}$$

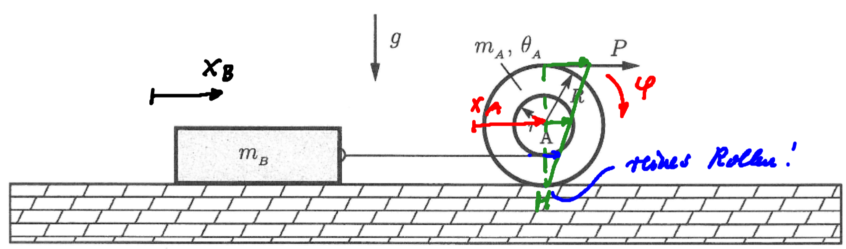
N.R.:

$z(r) = \frac{r^2}{a}$

$z(R) \overset{!}{=} h$

$\Rightarrow \frac{R^2}{a} = h \Leftrightarrow \underline{h\cdot a = R^2}$

Aufgabe: Kinetik von Starrkörpersystemen



Das auf der Stufenrolle aufgewickelte Seil ist mit einem Klotz der Masse m_B verbunden. Angetrieben wird das *rein rollende* Stufenrad über eine konstante Kraft P, die stets am höchsten *materiellen* Punkt des Rades horizontal nach rechts zieht. Zwischen dem Klotz und der Unterlage liegt Gleitreibung nach dam COULOMBschen Gesetz vor (Reibungskoeffizient μ).

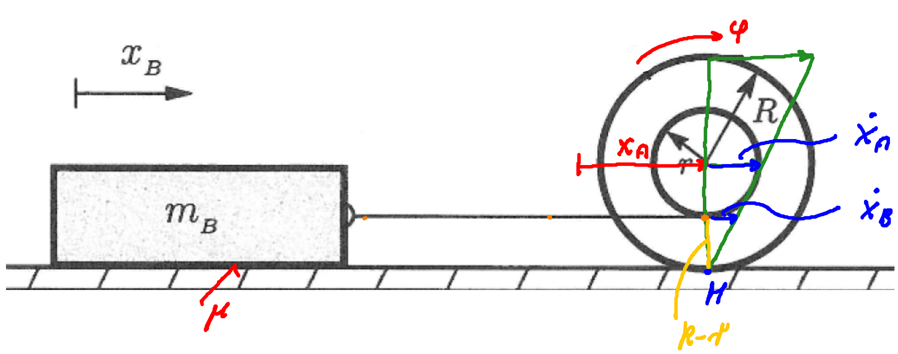
(a) Führen Sie geeignete Koordinaten zur Beschreibung der Bewegung der Stufenrolle ein und stellen Sie alle notwendigen kinematischen Beziehungen auf.

(b) Ermitteln Sie die Beschleunigung $\ddot{x}_B$ des Körpers mit der Masse m_B.

(c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das Rad tatsächlich ohne Schlupf rollt und wie müsste man vorgehen, um diese zu prüfen?

Gegeben: μ_o, μ, r, R, g, m_B, m_A, θ_A, P

(a) Kinematische Beziehungen:

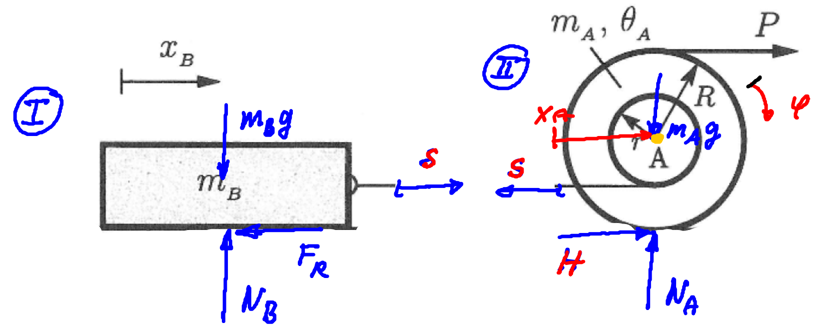


$$\dot x_A = R\dot\varphi$$

$$\dot x_B = (R-r)\,\dot\varphi \Rightarrow \boxed{\dot\varphi = \frac{\dot x_B}{R-r}} \Rightarrow \boxed{\dot x_A = \frac{R}{R-r}\,\dot x_B}$$

(b) Gesucht: $\ddot x_B$

Freischnitt:



Schwerpunktsatz und Drallsatz:

I $\quad m_B\ddot x_B = S - F_R \quad$ mit $F_R = \mu N_B = \mu m_B g$

$$m_B\ddot x_B = S - \mu m_B g \quad (3) \qquad // \cdot (R-r)$$

II $\quad m_A\ddot x_A = P + H - S$

$$\Theta_A\,\ddot\varphi = -H\cdot R + P\cdot R + S r$$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen

$$m_A\frac{R}{R-r}\,\ddot x_B = P + H - S \qquad (4) \qquad // \cdot R$$

$$\Theta_A\frac{\ddot x_B}{R-r} = -HR + P\cdot R + Sr \quad (5)$$

$+$

$$\left[m_B(R-r) + m_A\frac{R^2}{R-r} + \frac{\Theta_A}{R-r}\right]\ddot x_B = -\mu m_B g\,(R-r) + 2P\cdot R$$

$$\boxed{\ddot x_B = \frac{2PR - \mu m_B g\,(R-r)}{m_B\,(R-r) + m_A\frac{R^2}{R-r} + \frac{\Theta_A}{R-r}}}$$