7. Übung

Raumaufteilung für den 1. Kurzfragentest

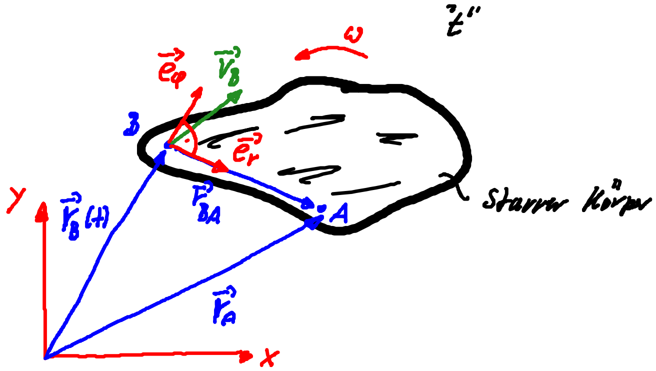
Die **Raumaufteilung** für den 1. Kurzfragentest am **Samstag, den 25.05.2019** in der Zeit **von 12:30-13:30 Uhr** erfolgt nach den Anfangsbuchstaben des Nachnamens und ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Raumaufteilung	
Anfangsbuchstabe(n) des Nachnamens	**Raumnummer**
A - Fi	H 105
Fj - La	HE 101
Lb - Re	H 104
Rf - To	MA 001
Tp - Z	EB 301
Achtung: Alle Studierenden mit Nachteils-ausgleich (Schreibzeitverlängerung bitte vor der Prüfung vorzeigen)	**H 105**

Thema: Ebene Starrkörperkinematik

1. Gesetz der Starrkörperkinematik

"t"



Gegeben: $\vec v_B$, $\vec\omega = \omega \vec e_z$

$[\vec\omega] = \frac{1}{s}$

Gesucht: $\vec v_A$

Ortsvektor zum Punkt A:

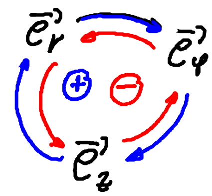
$$\vec r_A(t) = \vec r_B(t) + \vec r_{BA}(t) \qquad (1)$$

$\vec e_r$, $\vec e_\varphi$: Basisvektoren, die am Körper festgetackert sind!

N.R.: $\vec r_{BA} = l_{BA}\, \vec e_r(t) \qquad (3)$

$l_{BA} = \text{const.} \Rightarrow \dot l_{BA} = 0$

WH: Kinematischer Teufelskreis



$$\vec e_z \times \vec e_r = \vec e_\varphi$$

Geschwindigkeit von Punkt A

$$\vec v_A(t) = \dot{\vec r}_A(t) = \dot{\vec r}_B + \dot{\vec r}_{BA} \qquad (2)$$

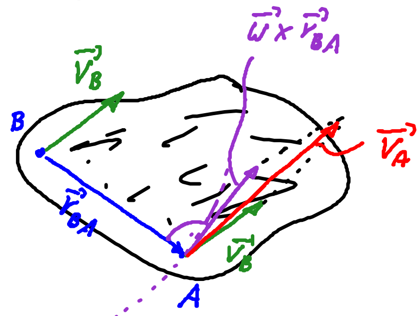
$$\vec v_A(t) = \vec v_B(t) + \left[l_{BA}\,\vec e_r(t)\right]^{\bullet}$$

$$= \vec v_B(t) + l_{BA}\,\dot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t)$$

$$= \vec v_B(t) + l_{BA}\,\dot\varphi(t)\,\vec e_z \times \vec e_r$$

$$= \vec v_B(t) + \underbrace{\dot\varphi(t)\,\vec e_z}_{=\vec\omega(t)} \times \underbrace{l_{BA}\,\vec e_r(t)}_{\vec r_{BA}}$$

$$\boxed{\vec v_A(t) = \vec v_B(t) + \underbrace{\vec\omega \times \vec r_{BA}}_{\text{Rotation von A um B!}}} \qquad (4)$$



Einfachste Formel für die Starrkörperbewegung!

Merke: Gl. (4) gilt auch für eine räumliche Bewegung!

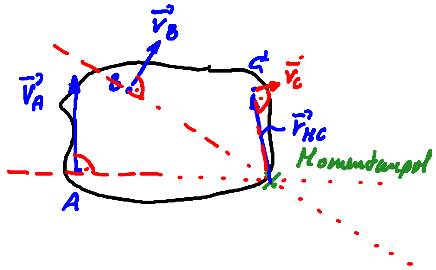
Eselsbrücke: ABBA → schwedische Pop-Band

Beschleunigung: $\vec a_A(t) := \dot{\vec v}_A = \dot{\vec v}_B + \left[\vec\omega \times \vec r_{BA}\right]^{\bullet} = \vec a_B + \dot{\vec\omega} \times \vec r_{BA} + \vec\omega \times \dot{\vec r}_{BA}$

$$\boxed{\vec a_A(t) = \vec a_B + \dot{\vec\omega} \times \vec r_{BA} + \vec\omega \times \left(\vec\omega \times \vec r_{BA}\right)} \qquad (5)$$

2. Satz vom Momentanpol / Momentanzentrum

Jede ebene Bewegung eines starren Körpers können wir als reine Rotation um den sogenannten Momentanpol (Momentanzentrum) darstellen. Der Momentanpol hat keine Geschwindigkeit, seine Lage ändert sich i.A. aber mit der Zeit

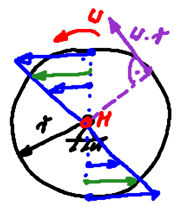


Euler-Formel:

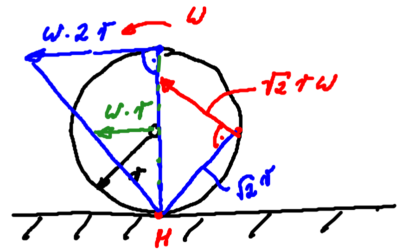
$$\boxed{\vec v_A = \underbrace{\cancel{\vec v_H}}_{=\vec 0} + \vec\omega \times \vec r_{HA} = \vec\omega \times \vec r_{HA}}$$

$$\boxed{\vec v_B = \underbrace{\cancel{\vec v_H}}_{=\vec 0} + \vec\omega \times \vec r_{HB} = \vec\omega \times \vec r_{HB}}$$

Bsp:



Mittig gelagerte Scheibe

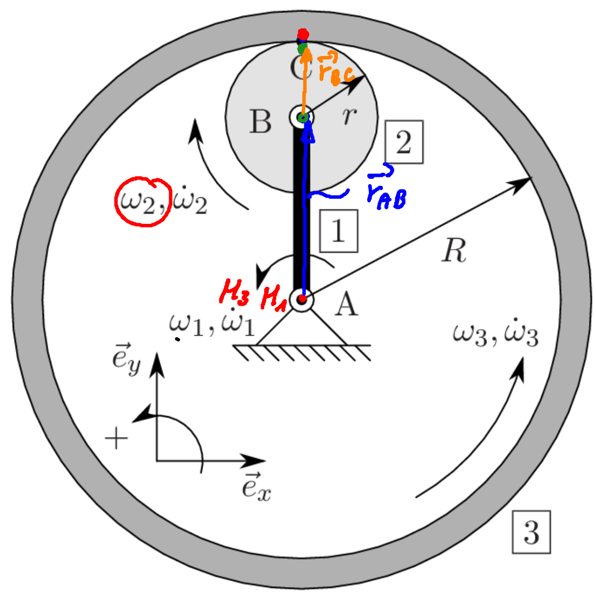


Reines Rollen eines Rades

---

29. Die Stange $\boxed{1}$ hat die Winkelgeschwindigkeit ω_1 und die Winkelbeschleunigung $\dot\omega_1$. Die Scheibe $\boxed{2}$ rollt innen auf dem Aussenring $\boxed{3}$ ab ohne zu gleiten. Der Aussenring dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_3 und der Winkelbeschleunigung $\dot\omega_3$ um den Lagerpunkt A.
Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_2 und die Winkelbeschleunigung $\dot\omega_2$ der Scheibe.

Geg.: r, R, ω_1, $\dot\omega_1$, ω_3, $\dot\omega_3$



Vektorielle Lösung:

Gesucht: ω_2 im gezeigten Zustand

Am Punkt B haben die Berührpunkte von $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ die gleiche Geschwindigkeit
Analoges gilt für den Punkt C. Hier haben die Berührpunkte von $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$ die gleiche Geschwindigkeit

$$\vec v_B = \vec v_B^{\boxed{1}} \overset{!}{=} \vec v_B^{\boxed{2}} \qquad \vec v_C = \vec v_C^{\boxed{2}} \overset{!}{=} \vec v_C^{\boxed{3}}$$

Euler-Formel: $\vec v_B = \vec v_B^{\boxed{1}} = \underbrace{\cancel{\vec v_A}}_{=\vec 0} + \vec\omega_1 \times \vec r_{AB} = \omega_1 \vec e_z \times (R-r)\vec e_y = \underline{\underline{-\omega_1 (R-r)\vec e_x}}$

$$\vec v_C = \vec v_C^{\boxed{3}} = \underbrace{\cancel{\vec v_A}}_{=\vec 0} + \vec\omega_3 \times \vec r_{AC} = \omega_3 \vec e_z \times R\vec e_y = \underline{\underline{-\omega_3 R \vec e_x}}$$

Euler-Formel für Scheibe $\boxed{2}$: $\vec v_C = \vec v_B + \vec\omega_2 \times \vec r_{BC}$ mit $\vec\omega_2 = -\omega_2 \vec e_z$, $\vec r_{BC} = r\vec e_y$

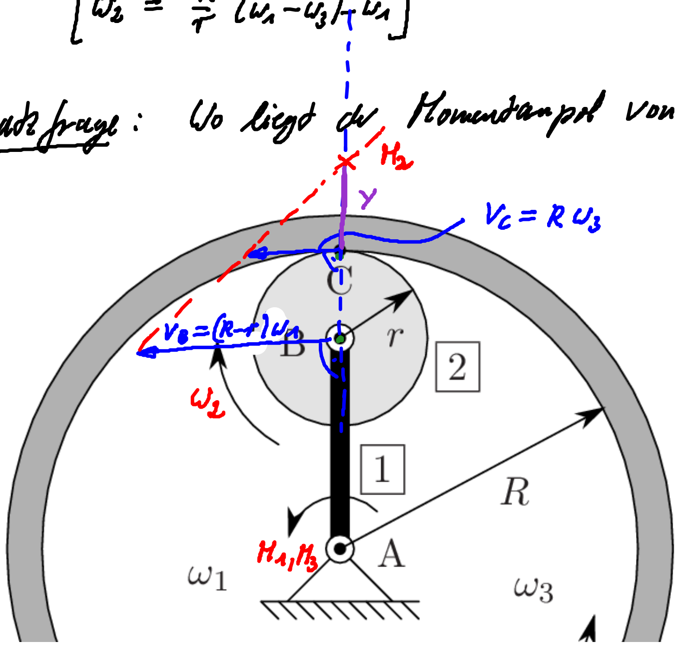
$$-\omega_3 R\,\vec e_x = -\omega_1 (R-r)\vec e_x - \omega_2 \vec e_z \times r\vec e_y$$

$$-\omega_3 R \vec{e}_x = -\omega_1 (R-r)\vec{e}_x + \omega_2 r \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2} = -\omega_3 \frac{R}{r} + \omega_1 \frac{R-r}{r} = \boxed{\frac{R}{r}(\omega_1 - \omega_3) - \omega_1}$$

$$\left[\dot{\omega}_2 = \frac{R}{r}(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_3) - \dot{\omega}_1\right]$$

Zusatzfrage: Wo liegt der Momentanpol von $\boxed{2}$?



sei $\omega_1 >> \omega_3$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MC}$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MB}$$

$$v_C = y \cdot \omega_2$$

$$v_B = (y + r) \cdot \omega_2$$

$-$

$$v_B - v_C = r\,\omega_2$$

$$(R-r)\,\omega_1 - R\,\omega_3 = r\,\omega_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega_1 - \frac{R}{r}\,\omega_3 = \boxed{\frac{R}{r}(\omega_3 - \omega_1) - \omega_1}$$

Da Vincis Unendlichkeitsmaschine!

„Experiment" z.B. im Phaeno zu sehen!