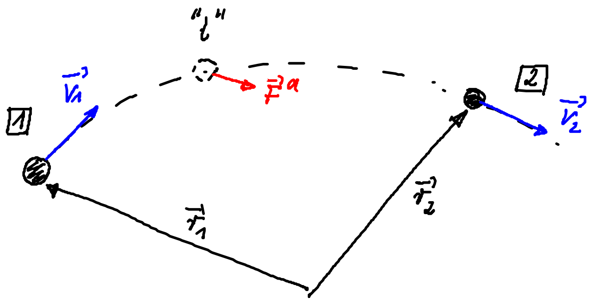
# 6. Übung

**Wichtige Infos:**
- Selbsttest im Netz verfügbar (bitte 45 Minuten Zeit nehmen)
  $\longrightarrow$ Lösungen in den Tutorien
- Anmeldung zur Portfolioprüfung nicht vergessen!
  Problem: Ab 14 Uhr finden Wartungsarbeiten bei QISPOS statt
- Raumaufteilung wird voraussichtlich ab Montagabend im Netz stehen

**Thema:** Arbeitssatz, Energieerhaltungssatz

## 1. Arbeitssatz:

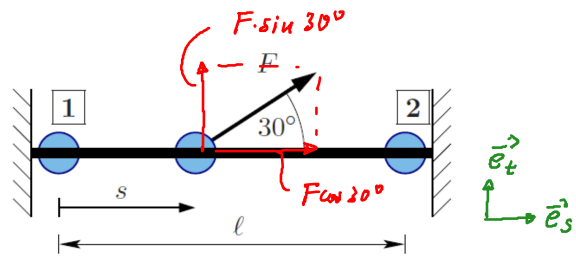



$$\boxed{K_2 - K_1 = W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^a \cdot d\vec{r}}$$

Skalarprodukt

Die von den äußeren Kräften $\vec{F}^a$ bei der Bewegung des MP von $\boxed{1}$ nach $\boxed{2}$ verrichtete Arbeit entspricht der Differenz der kinetischen Energien in den Zuständen $\boxed{2}$ und $\boxed{1}$.

Infolge einer konstanten Kraft gleitet eine Perle auf einer Stange von Zustand $\boxed{1}$ zum Zustand $\boxed{2}$. Die konstante Kraft, die diese Bewegung verursacht, hat den Betrag $F$ und schließt einen Winkel von 30° mit der Horizontalen ein.




(a) Welche Arbeit verrichtet die Kraft $F$ auf dem Weg der Perle von $\boxed{1}$ nach $\boxed{2}$, wenn die Perle **reibungsfrei** auf der Stange gleitet?

$$\vec{F} = F \cdot \cos 30° \, \vec{e}_s + F \cdot \sin 30° \, \vec{e}_t$$

$$\vec{r}_{12} = \ell \, \vec{e}_s$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}_{12} = F \cdot \cos 30° \, \ell$$

$$W_{12} = \vec{F} \cdot \vec{r}_{12} = F \cdot \cos 30° \cdot \ell = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, F \cdot \ell$$

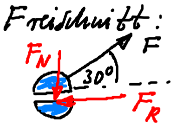
(b) Wie groß ist die Arbeit **aller** Kräfte auf dem Weg der Perle von $\boxed{1}$ nach $\boxed{2}$, wenn zwischen der Perle und der Stange **Coulombsche Reibung** mit dem Reibungskoeffizienten $\mu$ vorherrscht?

$$W_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, F \cdot \ell + \int_1^2 \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\, F \ell + \vec{F}_R \cdot \vec{r}_{12}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\, F \cdot \ell - F_R \, \vec{e}_s \cdot \ell \, \vec{e}_s$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}\, F \ell - \mu \frac{1}{2} F \cdot \ell$$

Freischnitt:




$$\Sigma F_t = 0$$

$$-F_N + F \cdot \sin 30° = 0$$

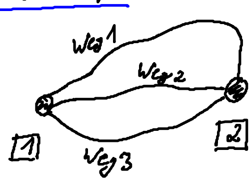
$$F_N = \frac{1}{2} F$$

Gegeben: $\ell$, $F$, $\mu$ in Aufgabenteil (b)

**2 Punkte**

---

## 2.) Konservative Kräfte




Ist die Arbeit einer äußeren Kraft unabhängig vom Weg, so heißt die Kraft konservativ!

$\Rightarrow$ Die Arbeit von konservativen Kräften kann als Potenzialdifferenz notiert werden – Differenz von Potenziellen Energien

$$\boxed{W_{12}^{kons.} = \int_1^2 \vec{F}^{kons} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2} \quad (1)$$

Beispiele: Gewichtskraft, Federkraft

3.) Alternative Form des Arbeitssatzes

$$\vec F^{a} = \vec F^{ein} + \vec F_z = \underbrace{\vec F^{kons} + \vec F^{n.k.}}_{\vec F_{ein}} + \vec F_z$$

$\vec F_z$ : Zwangskräfte
$\vec F^{kons}$ : konservative Kräfte
$\vec F^{n.k.}$ : Nicht konservative Kräfte

$$K_2 - K_1 = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \left(\vec F^{kons} + \vec F^{n.k} + \vec F_z\right)\cdot d\vec r$$

$$K_2 - K_1 = W_{12}^{kons} + W_{12}^{n.k}$$

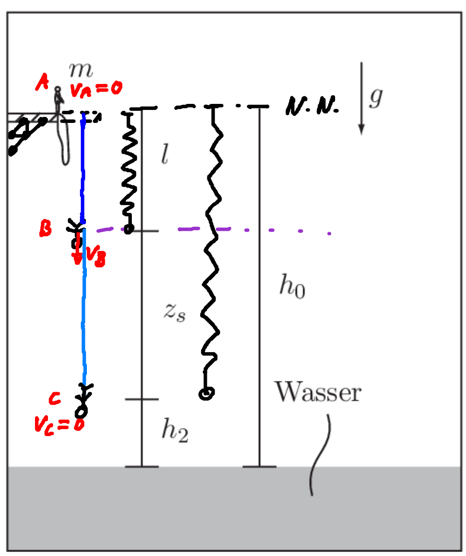
$$K_2 - K_1 \overset{(1)}{=} U_1 - U_2 + W_{12}^{n.k} \Rightarrow \boxed{K_2 + U_2 - K_1 - U_1 = W_{12}^{n.k.} = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \vec F^{n.k.}\cdot d\vec r} \quad (2)$$

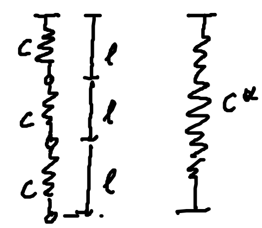
4.) Energieerhaltungssatz

Gilt $\vec F^{n.k.} = \vec 0$, folgt aus (2) der Energieerhaltungssatz:

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1 = \text{Const.}} \quad (3)$$

107. Ein Bungee-Jumper, welcher als Punktmasse $m$ vereinfacht werden kann, springt verbunden mit einem elastischen Seil der Länge $l$ und der Steifigkeit $c$ von einer Plattform, welche sich in der Höhe $h_0$ über der Wasseroberfläche befindet. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt und das Seil wird als masselos angenommen.




(a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Springers am Ende des freien Falls?
**Hinweis:** Das Seil ist bis zu dieser Höhe entspannt.

(b) Um welchen Weg $z_s$ dehnt sich das Seil, wenn der Springer die geringste Höhe $h_2$ erreicht hat?
Geben Sie die Falltiefe $\underline{a} = l + z_s$ an.

(c) Geben Sie die Falltiefe $\hat{a}$ bei der Verwendung von drei aneinandergeknoteten Seilen an, wobei jedes einzelne Seil die Länge $l$ und Steifigkeit $c$ hat. Für diesen Aufgabenteil sei $h_0$ groß genug, so dass kein Eintauchen des Springers in das Wasser erfolgt.

Geg.: $m, g, l, c$

(a) Energieerhaltung von A → B:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 + (-mgl) \Rightarrow \underline{\underline{v_B = \sqrt{2gl}}}$$

(b) Energieerhaltung von A → C:

$$K_A + U_A = K_C + U_C$$

$$0 + 0 = 0 + (-mg(l + z_s)) + \frac{1}{2} c z_s^2$$

$$z_s^2 - \frac{2mg}{c} z_s - \frac{2mg}{c} l = 0$$

p-q-Formel: $$z_{s_{I/II}} = \frac{mg}{c} \underset{(-)}{+} \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \frac{2mg}{c} l}$$

$$z_s = \frac{mg}{c}\left[1+\sqrt{1+\frac{2c}{mg}l}\right]$$

$$a = l + z_s = l + \frac{mg}{c}\left[1+\sqrt{1+\frac{2c}{mg}l}\right] \quad (*)$$

(c) Ersatzfedersteifigkeit: $\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3} = \frac{3}{c} \Rightarrow \boxed{c^* = \frac{c}{3}}$ ≙ Steifigkeit des Bungeeseiles der Länge $3l$

$l \to 3l$

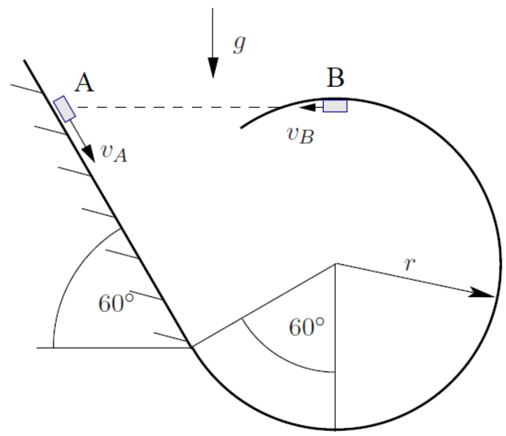
$c \to c^* = \frac{c}{3}$

$$\hat{a} = 3l + \frac{3mg}{c}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\cdot c}{\cancel{3}mg}\cancel{3}l}\right]$$

$$= 3\cdot a$$

---

Ein kleiner Körper (Massepunkt) der Masse $m$ gleitet **reibungsfrei** eine geneigte Ebene hinab und anschließend in einen Looping vom Radius $r$ hinein. Der Körper startet im Punkt A, welcher sich auf gleicher Höhe befindet wie der höchste Punkt B des Loopings. Dabei hat der Körper die Anfangsgeschwindigkeit $v_A$.




(a) Nehmen Sie zunächst an, dass $v_A$ so groß ist, dass der Körper den Punkt $B$ auf jeden Fall erreicht. Welche Geschwindigkeit erreicht der Körper dann im höchsten Punkt B des Loopings?

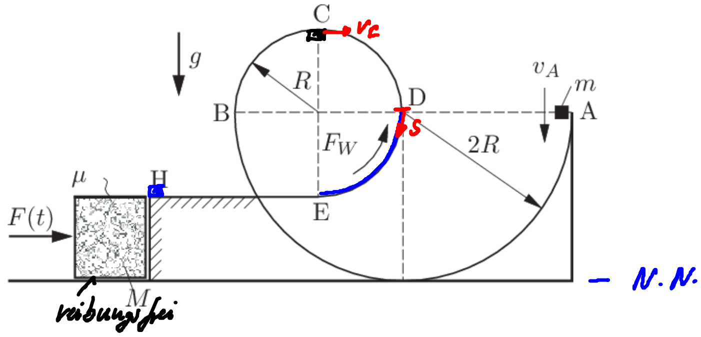
$v_B =$

(b) Wie groß muss die Geschwindigkeit $v_A$ mindestens sein, damit der Körper den höchsten Punkt B des Loopings gerade noch erreicht?

$v_A =$

Gegeben: $r$, $m$, $g$, $v_A$ in Aufgabenteil (a) **2 Punkte**

94. Eine Punktmasse $m$ bewegt sich von A aus durch einen Halbkreis A-B mit dem Radius $2R$ und anschließend durch einen Dreiviertelkreis-Looping B-E mit dem Radius $R$. Am Ende eines geraden Übergangstückes E-H gleitet die Punktmasse schließlich auf einen größeren Klotz der Masse $M$. Im Viertelkreis D-E wirkt der Punktmasse die Widerstandskraft $F_W(s)$ entgegen, der Rest der Bahn ist reibungsfrei. Zwischen der Punktmasse und dem Klotz herrscht Gleitreibung ($\mu$), auf den Klotz wirkt zudem die Kraft $F(t)$.




(a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit $v_A = \sqrt{3gR}$ betragen muß, damit die Punktmasse im höchsten Punkt C des Loopings gerade noch nicht herunterfällt.

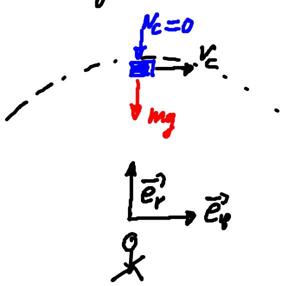
(b) Wie groß ist die Konstante $k$ im Ausdruck für die Widerstandskraft $F_W(s)$ zu wählen, damit die Punktmasse im Punkt H gerade die Geschwindigkeit $v_H = \sqrt{gR}$ besitzt? Anmerkung: Die Koordinate $s$ beginnt bei D.

(c) Berechnen Sie mit $v_H$ aus (b) die Geschwindigkeit $v_M$ des Klotzes, wenn die Punktmasse auf dem Klotz zur Ruhe gekommen ist. Die Zeitzählung beginnt, wenn die Punktmasse in H auf den Klotz gleitet.

Geg.: $g$, $m$, $M = \frac{1}{2}m$, $F(t) = \frac{1}{8}m\sqrt{\frac{g^3}{R}}t$, $R$, $F_W(s) = \frac{4km}{\pi^2}s$, $\mu = \frac{1}{4}$.

(a) Damit die Punktmasse im Punkt C nicht herunterfällt muss dort die Normalkraft größer Null sein.

Im Grenzfall $N_C = 0$ !




2. Newtonsches Gesetz im Punkt C im Grenzfall:

$$m a_{r_C} = -mg$$

$$+\cancel{m} R\dot{\varphi}_C^2 = +\cancel{m}g$$

$$\frac{(R\dot{\varphi}_C)^2}{R} = g \iff \frac{v_C^2}{R} = g \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{Rg}} \quad (1)$$

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}(t) = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi \underbrace{- R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r}_{a_r}$$

$$v_C = R\dot{\varphi}_C$$

Alternative: Einfach Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gewichtskraft (im mitbewegten System) ansetzen!

Energieerhaltung von $A \to C$:

$$K_A + U_A = K_C + U_C$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 + \cancel{m}g2R = \frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 + \cancel{m}g3R$$

$$\frac{1}{2}v_A^2 = \frac{1}{2}Rg + 3gR - 2gR$$

$$v_A = \sqrt{3Rg} \quad (2)$$

(b) Arbeitssatz von $D \to E$:

$$F_W(s) = \frac{4km}{\pi^2}s$$

$$K_E + U_E - K_D - U_D = \int_{D}^{E} \vec{F}_W(s)\cdot d\vec{s}$$

$$\frac{1}{2}mv_E^2 + mgR - \frac{1}{2}mv_D^2 - mg2R = -\int_0^{\frac{\pi}{2}R} F_W(s)\,ds$$

mit $v_E = v_H$ , $v_D = v_A$

$$\frac{1}{2} m v_H^2 + mgR - \frac{1}{2} m v_A^2 - mg2R = -\frac{4k}{\pi^2} m \int_0^{\frac{\pi}{2}R} s\,ds = -\frac{4k}{\pi^2} m \frac{1}{2} s^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}R}$$

$$= -\frac{4k}{\pi^2} m \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} R\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} gR + \cancel{m} gR - \frac{1}{2} \cancel{m}\, 3gR - \cancel{m} g\, 2R = -\frac{k}{2\cancel{\pi^2}} \cancel{m} R^2 \cancel{\pi^2}$$

$$-2gR = -\frac{kR^2}{2} \Rightarrow \underline{\underline{k = 4\frac{g}{R}}}$$

(c) Selbst probieren! Aufgabentyp hat Ähnlichkeit mit der Boot-Reibungsaufgabe aus der VL!