5. Übung

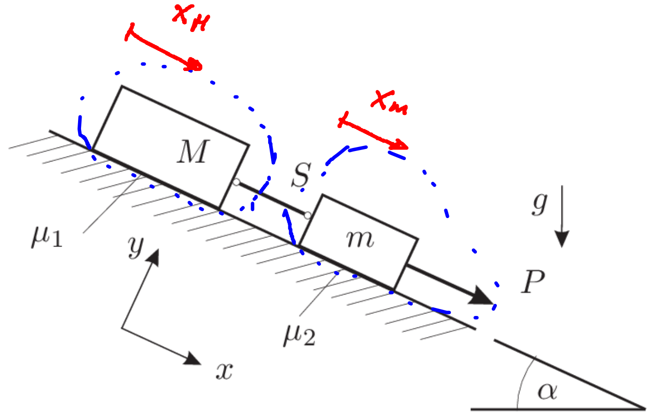
Infos: 1.) Tut Mi: 12-14 Raum H 110

- am 15.05. im Raum TC 006
- am 22.05. im Raum EW 202

2.) Colloquium am Fr., den 17.05. im Raum Ma 041

Wiederholung: Newtonsches GG

46. Zwei Massen M und m mit den Reibungskoeffizienten μ_1 bzw. μ_2 gegenüber der rauen Unterlage sind durch einen masselosen starren Stab verbunden und gleiten eine schiefe Ebene hinab. An der Masse m greift zusätzlich noch eine Kraft P an.



Geg.: M, m, P, g, μ_1, μ_2, α

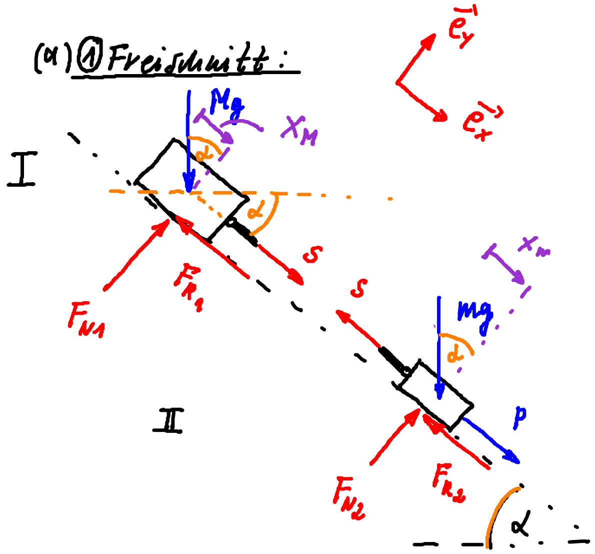
Lösen Sie folgende Teilaufgaben mit Hilfe der **Newtonschen Axiome**!

(a) Machen Sie eine Freischnittskizze und bestimmen Sie die Stabkraft S!
Wie groß ist die Beschleunigung des Systems?

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg, wenn die Kraft $P = 0$, die Reibungskoeffizienten $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ sind und die Massen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 hinabgestoßen wurden?

(c) Nach welcher Strecke kommen die Massen zur Ruhe? Unter welchen Umständen ist dies möglich?

(a) ① Freischnitt:



② 2. Newtonsches Grundgesetz

$$\text{I} \quad M\ddot{x}_M = \Sigma F_x = S - F_{R1} + Mg\sin\alpha \quad (1)$$

$$M\ddot{y}_M = \Sigma F_y = F_{N1} - Mg\cos\alpha$$

Kinematischer Zwang:

$$y_M(t) = \text{const.} \Rightarrow \dot{y}_M(t) = 0 \Rightarrow \underline{\ddot{y}_M(t) = 0}$$

$$\Rightarrow 0 = F_{N1} - Mg\cos\alpha$$

$$\underline{F_{N1} = Mg\cos\alpha}$$

Coulombsches Reibgesetz:

$$\underline{F_{R1}} = \mu_1 F_{N1} = \underline{\mu_1 Mg\cos\alpha} \quad (2)$$

$$\text{II} \quad m\ddot{x}_m = \Sigma F_x = -S - F_{R2} + mg\sin\alpha + P \quad (3)$$

analog zu oben: $F_{R2} = \mu_2 F_{N2} = \mu_2\, mg\cos\alpha \quad (4)$

(2) in (1) und (4) in (3) sowie Berücksichtigung der kinematischen Beziehung $\dot{x}_m = \dot{x}_M =: \dot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M =: \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{x} = S - \mu_1 Mg\cos\alpha + Mg\sin\alpha \quad (5)$$

$$m\ddot{x} = -S - \mu_2 mg\cos\alpha + mg\sin\alpha + P \quad (6)$$

$\downarrow +$

Auflösung des Gleichungssystems nach S und $\ddot{x}$:

$$(5)+(6) \Rightarrow \quad (M+m)\ddot{x} = -(\mu_1 M + \mu_2 m)g\cos\alpha + (M+m)g\sin\alpha + P \quad // :(M+m)$$

$$\ddot{x} = -\frac{(\mu_1 M + \mu_2 m)}{M+m} g\cos\alpha + g\sin\alpha + \frac{P}{M+m} \quad (7)$$

Stabkraft:

$$(5)/M - (6)/m \Rightarrow \quad 0 = S\underbrace{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)}_{=\frac{m+M}{m\cdot M}} - \mu_1 g\cos\alpha + \cancel{g\sin\alpha} + \mu_2 g\cos\alpha - \cancel{g\sin\alpha} - \frac{P}{m}$$

$$S = \frac{mM}{m+M}\left[(\mu_1 - \mu_2)g\cos\alpha + \frac{P}{m}\right] \quad (8)$$

(b) Vorgaben: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; $P = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$, $x(0) = 0$

Gesucht: $v(x) \Leftarrow\Rightarrow \dot{x}(x)$

aus (7) $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x}(t) = -\mu g\cos\alpha + g\sin\alpha} = \text{const.}$ $\quad < 0 \Rightarrow \mu > \tan\alpha$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \text{const}$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot v = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\int_{v_0}^{v} \tilde{v}\, d\tilde{v} = \int_0^x g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, d\tilde{x}$$

$$\frac{1}{2}\tilde{v}^2\Big|_{v_0}^{v} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,\tilde{x}\Big|_0^x$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,x$$

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)x} \qquad (9)$$

(c) Forderung: $v(x_E) \overset{!}{=} 0$ $\qquad x_E$: Strecke, nach der wir stehen bleiben

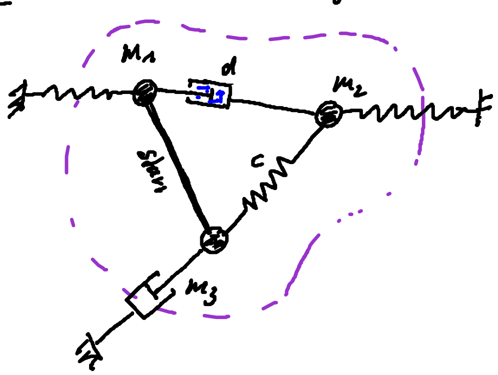
$$\overset{(9)}{\Rightarrow} v_0^2 + 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)x_E = 0$$

$$x_E = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

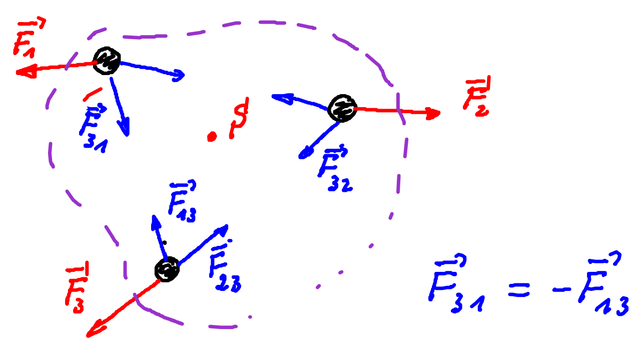
Forderung: $x_E > 0 \Rightarrow \dfrac{v_0^2}{2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)} > 0 \Rightarrow \mu\cos\alpha - \sin\alpha > 0$

$$\boxed{\tan\alpha < \mu}$$

Thema: Schwerpunktsatz für Massenpunktsysteme



Freischnitt:



$$\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$$

$$\underbrace{(m_1 + m_2 + m_3)}_{=:m}\cdot\ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\boxed{m\,\vec{a}_s = \Sigma\vec{F}_i =: \vec{F}^a} \qquad (1)$$

Der Schwerpunkt eines Systems von Massepunkten bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen.

<u>Innere</u> Kräfte $\vec{F}_{ij}$ haben auf den Impuls des Systems keinen Einfluss!

Alternative Schreibweise: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}_s) = \vec{F}^a \quad // \int_{t_0}^{t} (\,)\, d\tilde{t}$

$$\boxed{m\vec{v}_s(t) - m\vec{v}_s(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^a \, d\tilde{t} =: \hat{\vec{F}}} \quad (2)$$

Impulssatz!

$\hat{\vec{F}}$: Kraftstoß

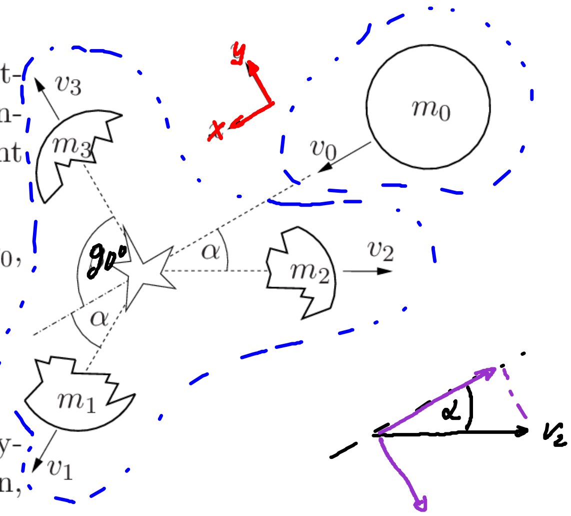
Sonderfall: Abgeschlossenes mechanisches System $\vec{F}^a = \vec{0}$

$$(2) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m\vec{v}_s(t) &= m\vec{v}_s(t_0) \\ \vec{p}(t) &= \vec{p}(t_0) \end{aligned}}$$

Impulserhaltungssatz!

---

68. Eine Kugel fliegt mit einer Geschwindigkeit v_0. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ zerplatzt sie in drei Teile. Alle Geschwindigkeitsvektoren liegen in einer Ebene. Deren Draufsicht ist anbei skizziert.



Geg.: m_0, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, v_0, $v_1 = 2\sqrt{3}v_0$, $v_2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}v_0$, $v_3 = \frac{8}{3}\sqrt{3}v_0$

(a) Bestimmen Sie die Massen der drei Teile.

(b) Wieviel mechanische Energie hat das gesamte System beim Zerplatzen insgesamt aufgenommen, wenn $m_0 = 6\,\text{g}$ (sechs Gramm) und $v_0 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

(a) Gesucht: Teilmassen m_1, m_2, m_3

Impulserhaltung des Massepunktsystems:
$$\vec{p}_{vor} = \vec{p}_{nach}$$
$$p_{x\,vor} = p_{x\,nach}$$
$$p_{y\,vor} = p_{y\,nach}$$

$$m_0 v_0 = -m_2 v_2 \cos\alpha + m_1 v_1 \cos\alpha \quad (1)$$
$$0 = m_3 v_3 - m_2 v_2 \sin\alpha - m_1 v_1 \sin\alpha \quad (2)$$

Massenerhaltung:
$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3 \quad (3)$$

Nach kurzer Rechnung ... $m_1 = \frac{1}{2} m_0$, $m_2 = m_3 = \frac{1}{4} m_0$

(b) Änderung der Energie: $\Delta K = K_{nach} - K_{vor}$
$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 - \frac{1}{2} m_0 \cdot v_0^2$$

$$= \dots = \underline{\underline{\frac{35}{6} m_0 v_0^2}}$$

$$\Delta k = \frac{35}{\cancelto{1}{6}} \cdot \cancelto{1}{6}g \cdot \left(10 \frac{m}{s}\right)^2 = 35\, g \cdot 100 \cdot \frac{m^2}{s^2} = 3500\, g \cdot \frac{m^2}{s^2} = 3{,}5 \overbrace{kg \frac{m}{s^2}}^{N} \cdot m$$

$$= 3{,}5\, Nm = \underline{\underline{3{,}5\, J}}$$