4. Übung

Thema: Kinetik von Massepunkten

Kinetik: Verknüpfung von kinematischen Größen mit den äußeren Kräften, die am Körper angreifen

2. Newtonsches Grundgesetz:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \Sigma \vec{F} =: \vec{F}^a \qquad \text{mit} \quad \vec{p} := m\vec{v}$$

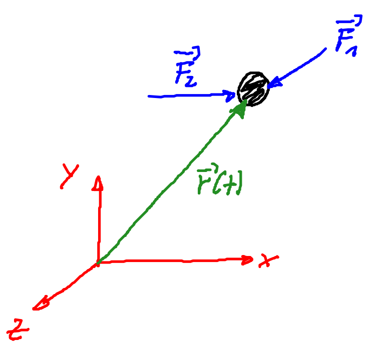
$\vec{p}$: Impuls

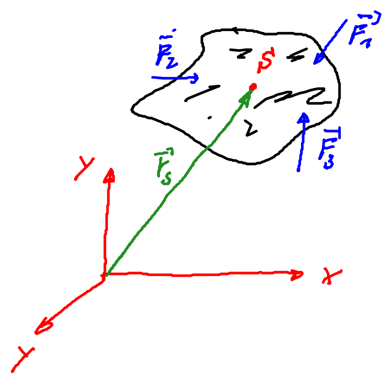
$\vec{F}^a := \Sigma \vec{F}$: Resultierende äußere Kraft

$$(m\vec{v})^{\bullet} = \Sigma \vec{F} \qquad \text{wenn } m = \text{const.} \Rightarrow \quad m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$$

$$\text{mit} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{\vec{r}} = \Sigma \vec{F}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = \Sigma F_x \\ m\ddot{y} = \Sigma F_y \\ m\ddot{z} = \Sigma F_z \end{array} \right.} \qquad (1)$$

Merke:
- Gilt nur im ruhenden Bezugssystem (Inertialsystem)
- $|\vec{v}| << c = 300.000 \frac{km}{s}$





Bei ausgedehnten Körpern gilt Glg. (1) für den Schwerpunkt!

Grundaufgaben der Kinetik:

1.) Bei gegebenen äußeren Lasten $\vec{F}^a$, kann auf die Bewegung $\vec{r}(t)$ geschlossen werden!

2.) Bei vorgegebener Bewegung kann die äußere Kraft ermittelt werden!

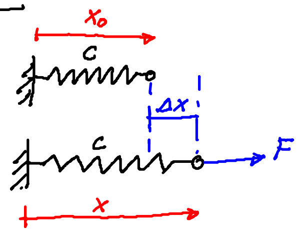
Einteilung von äußeren Kräften

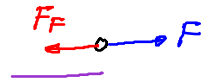
$\vec{F}^a$
- $\vec{F}^e$: Eingeprägte Kräfte
- $\vec{F}_z$: Zwangskräfte

Beispiele für eingeprägte Kräfte

1.) Lineares Federgesetz:

$$\boxed{F_F = c\,(x - x_0)}$$



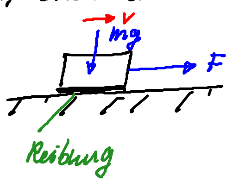


$\Sigma F_x = 0$

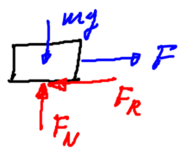
$\Rightarrow \underline{F_F = F}$

2.) Widerstandskräfte: Sie wirken stets entgegen der aktuellen Bewegungsrichtung

a.) Coulombsches Reibgesetz:



Freischnitt:



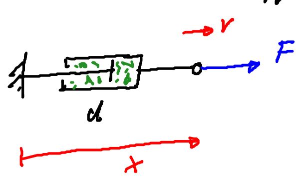
F_R : Reibkraft

F_N : Normalkraft

$$\boxed{F_R = \mu\, F_N}$$

μ : Reibungskoeff.

b.) Linear viskose Dämpfung:



$$\boxed{F_D = d\,v = d\,\dot{x}}$$

c.) Aerodynamische Widerstandskraft:

$$\boxed{F_W = k\,v^2}$$

Aufgabe: Freier Fall mit Luftreibung

Ein Körper der Masse m wird zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ in einem Abstand h vom Erdboden ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen. Während seiner Bewegung wirkt der Luftwiderstand gemäß

$$\underline{\vec{F}_w = -kv^2\,\vec{e}_v}\ .$$

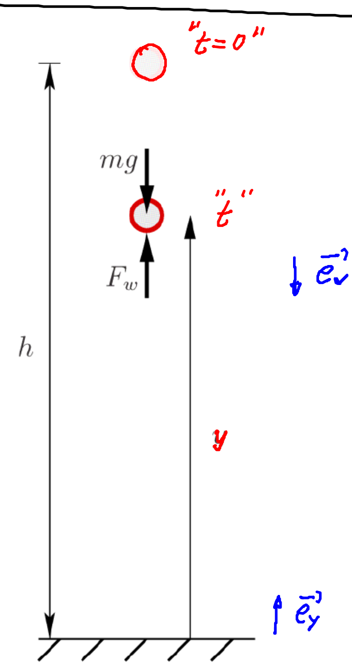
a) Ermitteln Sie die Bahngeschwindigkeit $v(t)$ des Körpers als Funktion der Zeit.

b) Welchem theoretischen Grenzwert nähert sich die Bahngeschwindigkeit nach genügend großer Zeit an? Skizzieren Sie den graphischen Verlauf der in Aufgabenteil a) ermittelten Bahngeschwindigkeit als Funktion der Zeit.

Hinweise:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \operatorname{artanh}(z) + C, \qquad \tanh(z) := \frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}}$$

Gegeben: k, m, g, h



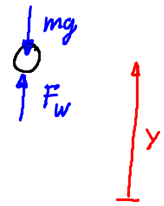
Infos: $y(0) = h$; $\dot{y}(0) = 0$

$v(t) = |\dot{y}(t)| = -\dot{y}(t) \Rightarrow \underline{\ddot{y}(t) = -\dot{v}(t)}$

a.) Bahngeschwindigkeit $v(t)$ gesucht! $\qquad v(t) := |\vec{v}(t)|$

$$\vec{F}_W = -kv^2\vec{e}_v = -kv^2(-\vec{e}_y) = \underbrace{kv^2}_{F_W}\vec{e}_y$$

① Freischnitt:



② 2. Newtonsches GG:

$$m\ddot{y}(t) = \Sigma F_y = F_W - mg$$

$$\boxed{-m\dot{v}(t) = kv^2 - mg}$$ Bewegungsdifferenzialgleichung!

③ Lösung der Bewegungsdgl

Abkürzung: $\varkappa^2 := \frac{k}{mg}$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 + g = g\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right) \qquad // : \left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right)$$

$$\int_{v_0=0}^{v} \frac{d\tilde{v}}{1 - \varkappa^2\tilde{v}^2} = \int_0^t g\, d\tilde{t} = gt$$

Substitution: $z = \varkappa\tilde{v} \Rightarrow dz = \varkappa\, d\tilde{v}$

$z(0) = 0$, $z(v) = \varkappa v$

$$\int_0^{\varkappa v} \frac{\frac{1}{\varkappa}dz}{1 - z^2} = gt$$ kurze Rechnung ergibt ...

$$\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\, \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}}$$

b.) Konstante Fallgeschwindigkeit:

$$v_G := \lim_{t \to \infty} \sqrt{\frac{mg}{k}}\, \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{mg}{k}}}}$$

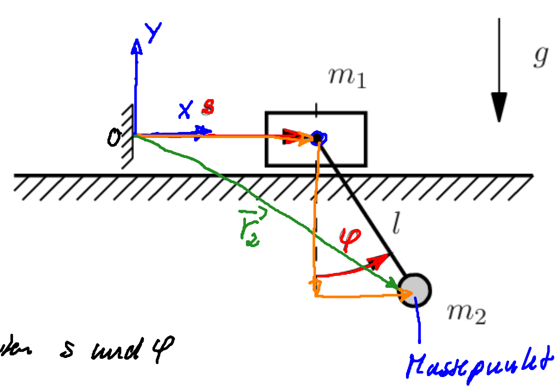
Realistische Werte durch $200 - 300\,\frac{km}{h}$, also weit weg von der Schallgeschwindigkeit in Luft $c \approx 330\,\frac{m}{s}$ bei $0°C$!

---

42. Die Aufhängevorrichtung (Masse m_1) eines ebenen Pendels mit der Länge l und der Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Schiene.

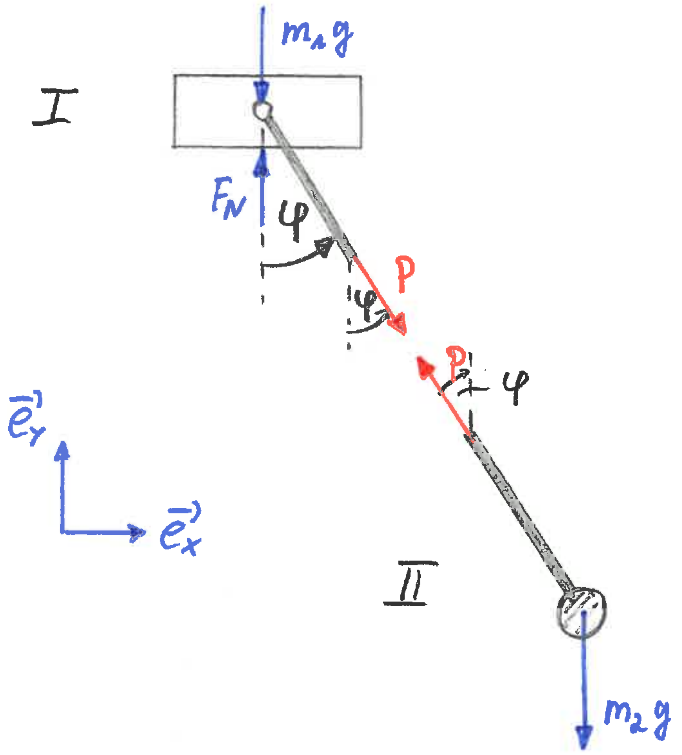
Ermitteln Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen.

Geg.: m_1, m_2, l, g



Das System hat 2 Fhg, die über die Koordinaten s und φ beschrieben werden

① Freischnitt



② 2. Newtonsches GG

I $m_1 \vec{a}_1 = \Sigma \vec{F}_1$

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_1 g \vec{e}_y - P\cos\varphi \vec{e}_y + F_N \vec{e}_y + P\sin\varphi \vec{e}_x \quad (1)$$

II $m_2 \vec{a}_2 = \Sigma \vec{F}_2$

$$m_2 \vec{a}_2 = -m_2 g \vec{e}_y + P\cos\varphi \vec{e}_y - P\sin\varphi \vec{e}_x \quad (2)$$

Problem: $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ müssen noch über s und φ bzw. deren Ableitungen ausgedrückt werden

③ Kinematik: Ortsvektoren aufstellen und ableiten

$$\vec{r}_1(t) = s(t)\vec{e}_x \Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}_1(t) = \ddot{s}\,\vec{e}_x}} \quad (3)$$

$$\vec{r}_2(t) = s(t)\vec{e}_x - l\cos\varphi(t)\vec{e}_y + l\sin\varphi(t)\vec{e}_x$$

$$\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t) = \dot{s}\,\vec{e}_x + l\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_y + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_x$$

$$\vec{a}_2(t) = \dot{\vec{v}}_2(t) = \ddot{s}\,\vec{e}_x + (l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\,\ddot{\varphi})\vec{e}_y + (-l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\ddot{\varphi})\vec{e}_x$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_2(t) = (\ddot{s} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\ddot{\varphi})\vec{e}_x + (l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\,\ddot{\varphi})\vec{e}_y}} \quad (4)$$

④ Einsetzen von (3) und (4) in (1) und (2)

$$m_1 \ddot{s}\,\vec{e}_x = (-m_1 g - P\cos\varphi + F_N)\vec{e}_y + P\sin\varphi\,\vec{e}_x \quad (5)$$

Die x und y Komponenten sind aber unabhängig

$\Rightarrow$ (5) enthält 2 skalare Gleichungen:

$$\vec{e}_x: \quad m_1 \ddot{s} = P\sin\varphi \quad (5_A)$$

$$\vec{e}_y: \quad 0 = -m_1 g - P\cos\varphi + F_N \quad (5_B)$$

$$m_2\left[(\ddot{s} - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\ddot{\varphi})\vec{e}_x + (l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\,\ddot{\varphi})\vec{e}_y\right]$$

$$= (-m_2 g + P\cos\varphi)\vec{e}_y - P\sin\varphi\,\vec{e}_x \qquad (6)$$

$$\vec{e}_x: \quad m_2(\ddot{s} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\ddot{\varphi}) = -P\sin\varphi \qquad (6_A)$$

$$\vec{e}_y: \quad m_2(l\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\sin\varphi\,\ddot{\varphi}) = -m_2 g + P\cos\varphi \qquad (6_B)$$

Die 4 Glgn $(5_A), (5_B), (6_A)$ und (6_B) enthalten 4 Unbekannte s, φ, P, F_N, die ermittelt werden können. Hier ist aber nur nach den Bewegungsdglen. gesucht, die keine Zwangskräfte (P, F_N) mehr enthalten dürfen. Diese müssen "eliminiert" werden. Da F_N einzig in (5_B) auftritt, ignorieren wir diese Glg.

⑤ Elimination der Zwangskraft P aus $(5_A), (6_A)$ bzw (6_B)

$(5_A) + (6_A) \Rightarrow$

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2(-l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}) = 0} \qquad (7)$$

$(6_A)\cdot\cos\varphi + (6_B)\cdot\sin\varphi \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{s}\cos\varphi + l\,\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi} \qquad (8)$$

(7) und (8) sind die Bewegungsdglen. des Systems. Aus ihnen kann uns der "Computer" unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen numerische Lösungen für $s(t)$ und $\varphi(t)$ ermitteln!