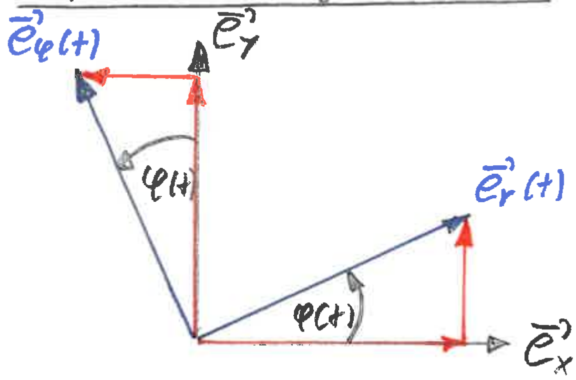
3. Übung

Thema: Darstellung kinematischer Größen $(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a})$ in der polaren Basis („mitdrehende“ Basis)

1.) Basistransformation:



Die Basisvektoren $\vec{e}_r(t)$ und $\vec{e}_\varphi(t)$ befinden sich in der x-y-Ebene und rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ um die z-Achse

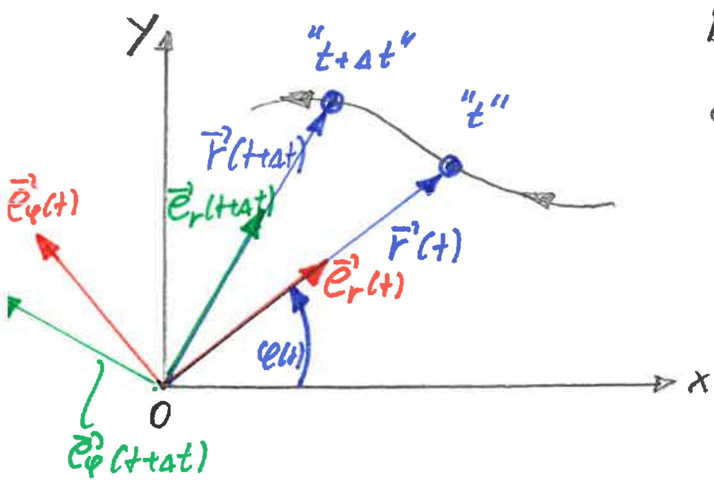
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r(t) &= \cos\varphi(t)\,\vec{e}_x + \sin\varphi(t)\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi(t) &= -\sin\varphi(t)\,\vec{e}_x + \cos\varphi(t)\,\vec{e}_y \end{aligned}} \quad (1) \quad \begin{aligned} &//\ (.)^{\cdot} \\ &//\ (.)^{\cdot} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r(t) &= -\sin\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_x + \cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_y \\ &= \dot{\varphi}(t)\cdot\underbrace{[-\sin\varphi(t)\,\vec{e}_x + \cos\varphi(t)\,\vec{e}_y]}_{=\vec{e}_\varphi(t)} = \dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\varphi(t) &= -\cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_x - \sin\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_y \\ &= -\dot{\varphi}(t)\,\underbrace{[\cos\varphi(t)\,\vec{e}_x + \sin\varphi(t)\,\vec{e}_y]}_{=\vec{e}_r(t)} = -\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_r(t) \end{aligned}$$

Merke:
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r(t) &= \dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t) \\ \dot{\vec{e}}_\varphi(t) &= -\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_r(t) \end{aligned}} \quad (2)$$

2.) Ebene Bewegung dargestellt in der polaren Basis:



Bei einer ebenen Bewegung weist der $\vec{e}_r(t)$ zu jedem Zeitpunkt auf den Massepunkt!

Der Ortsvektor lautet damit

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t) \quad (3)$$

und die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t) \\ &= \underline{\underline{\dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t)}} \end{aligned} \quad (4)$$

Die Beschleunigung ist demnach

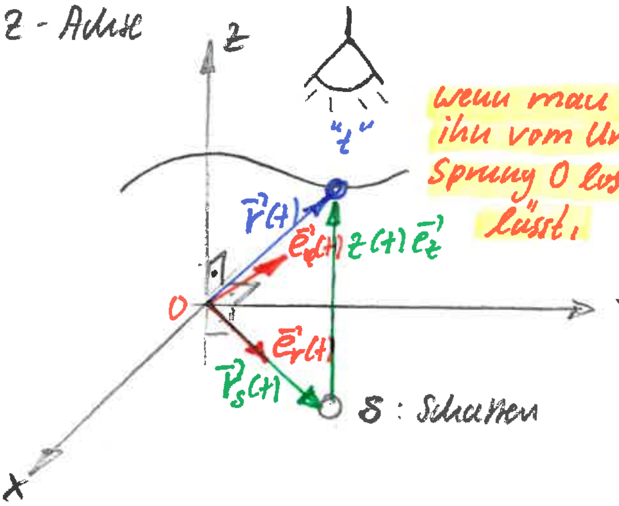
$$\vec a(t) = \dot{\vec v}(t) = \ddot r(t)\,\vec e_r(t) + \dot r(t)\,\dot{\vec e}_r + \dot r(t)\,\dot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t) + r(t)\,\ddot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t) + r(t)\,\dot\varphi(t)\,\dot{\vec e}_\varphi(t)$$

$$= \ddot r(t)\,\vec e_r(t) + \dot r(t)\,\dot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t) + \dot r(t)\,\dot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t) + r(t)\,\ddot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t) - r(t)\,\dot\varphi^2(t)\,\vec e_r(t)$$

$$= \left[\ddot r(t) \underbrace{- r(t)\,\dot\varphi^2(t)}_{\text{Zentripetalbeschleunigung}}\right]\vec e_r(t) + \left[\underbrace{2\dot r(t)\,\dot\varphi(t)}_{\text{Corioliesbeschleunigung}} + \underbrace{r(t)\,\ddot\varphi(t)}_{\text{Umfangsbeschleunigung}}\right]\vec e_\varphi(t) \qquad (5)$$

3.) Räumliche Bewegung dargestellt in der polaren Basis:

Nach wie vor drehen sich die Basisvektoren $\vec e_r$ und $\vec e_\varphi$ um die z-Achse



Bei räumlichen Bewegungen zeigt $\vec e_r(t)$, wenn man ihn vom Ursprung 0 loslaufen lässt, stets auf die Projektion des Punktes auf die x-y-Ebene (auf den Schatten der Punktmasse bei senkrechtem Lichteinfall)

Ortsvektor: $\vec r(t) = \vec r_s(t) + z(t)\,\vec e_z = r_s(t)\,\vec e_r(t) + \overbrace{z(t)\,\vec e_z}^{\text{kommt hinzu}}$

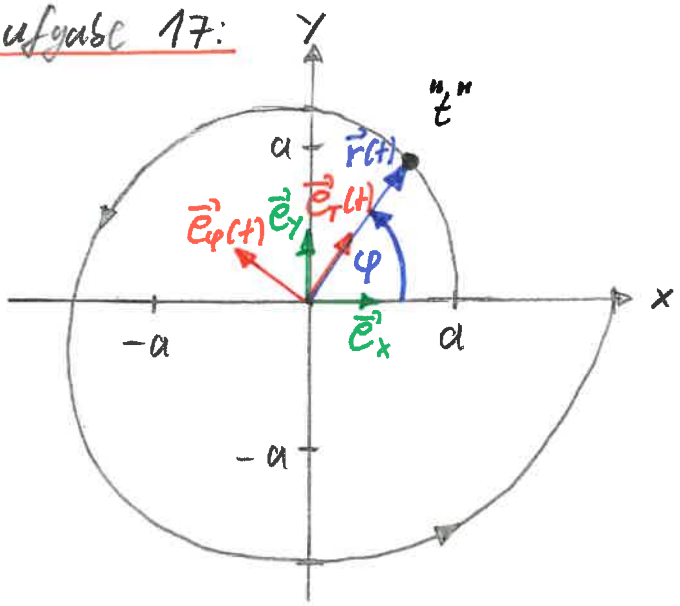
Geschwindigkeit: $\vec v(t) = \dot r_s(t)\,\vec e_r(t) + r_s(t)\,\dot{\vec e}_r(t) + \dot z(t)\,\vec e_z$

$$= \dot r_s(t)\,\vec e_r(t) + r_s(t)\,\dot\varphi(t)\,\vec e_\varphi(t) + \dot z(t)\,\vec e_z$$

Beschleunigung:

$$\vec a(t) = \left[\ddot r_s(t) - r_s(t)\,\dot\varphi^2(t)\right]\vec e_r(t) + \left[2\dot r(t)\,\dot\varphi(t) + r(t)\,\ddot\varphi(t)\right]\vec e_\varphi(t) + \ddot z(t)\,\vec e_z$$

Aufgabe 17:



Gegeben: $r(\varphi) = a\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)$ (1)

mit $0 < \varphi < 2\pi$, $a > 0$

$\varphi(t) = c\,t$ (2)

mit $c > 0$

Durch Einsetzen von (2) in (1) ergibt sich $r(t)$

$$r(t) = a\left(1+\frac{ct}{2\pi}\right) \quad (3)$$

Darstellung von v und a in der polaren Basis

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t) = a\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\vec{e}_r(t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{ac}{2\pi}\vec{e}_r(t) + a\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t)$

aus (2) $\Rightarrow$ $\dot{\varphi}(t) = c$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}(t) = \frac{ac}{2\pi}\vec{e}_r(t) + ac\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\vec{e}_\varphi(t)}} \quad (1)$$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{ac}{2\pi}\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t) + ac\frac{c}{2\pi}\vec{e}_\varphi(t)$

$$- ac\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_r(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}(t) = -ac^2\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\vec{e}_r(t) + \frac{ac^2}{\pi}\vec{e}_\varphi(t)}} \quad (2)$$

Darstellung von v und a in der kartesischen Basis

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y$

$$= r(t)\cos\varphi(t)\,\vec{e}_x + r(t)\sin\varphi(t)\,\vec{e}_y$$

$$= \underline{\underline{a\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\cos(ct)\,\vec{e}_x + a\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\sin(ct)\,\vec{e}_y}}$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \underline{\underline{\left[\frac{ac}{2\pi}\cos(ct) - a\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)c\sin(ct)\right]\vec{e}_x}}$$

$$\underline{\underline{+\left[\frac{ac}{2\pi}\sin(ct) + a\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)c\cos(ct)\right]\vec{e}_y}}$$

(3)

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \left[-2\frac{ac^2}{2\pi}\sin(ct) - ac^2\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\cos(ct)\right]\vec{e}_x + \left[2\frac{ac^2}{2\pi}\cos(ct) - ac^2\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\sin(ct)\right]\vec{e}_y \qquad (4)$$

Sind (1) und (3) sowie (2) und (4) tatsächlich gleich?

Bsp.: Umformung von (3):

$$\vec{v}(t) = \frac{ac}{2\pi}\cdot\underbrace{\left(\cos(ct)\vec{e}_x + \sin(ct)\vec{e}_y\right)}_{=\vec{e}_r(t)} + ac\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\underbrace{\left(-\sin(ct)\vec{e}_x + \cos(ct)\vec{e}_y\right)}_{=\vec{e}_\varphi(t)}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{ac}{2\pi}\vec{e}_r(t) + ac\left(1+\frac{c}{2\pi}t\right)\vec{e}_\varphi(t)$$ ← Das ist tatsächlich die Darstellung der Geschwindigkeit in der polaren Basis nach Glg (1)

Aufgabe 25: Klausuraufgabe aus SoSe 2015

Gegeben: $z(\varphi) = z_0(1-e^{-k\varphi})$ (1)

Informationen aus dem Text: 1. $\dot{\varphi}(t) = \omega$, $\varphi(0)=0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \omega t + C_1$$

aus $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = 0} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi(t) = \omega t}}$ (2)

2. $\dot{r}_s(t) = v_0$, $r_s(0) = R$

$$\Rightarrow r_s(t) = v_0 t + C_2$$

aus $r_s(0) = R \Rightarrow \underline{C_2 = R} \Rightarrow \underline{\underline{r_s(t) = v_0 t + R}}$ (3)

(a) Ortsvektor: $\vec{r}(t) = r_s(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z$

$$\underline{\underline{\vec{r}(t) = (v_0 t + R)\vec{e}_r(t) + z_0(1-e^{-k\omega t})\vec{e}_z}}$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = v_0\vec{e}_r(t) + (v_0 t + R)\dot{\vec{e}}_r(t) + z_0 k\omega e^{-k\omega t}\vec{e}_z$$

$$= \underline{\underline{v_0\vec{e}_r(t) + (v_0 t + R)\omega\vec{e}_\varphi(t) + z_0 k\omega e^{-k\omega t}\vec{e}_z}}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = v_0\omega\vec{e}_\varphi(t) + v_0\omega\vec{e}_\varphi(t) + (v_0 t + R)\omega\dot{\vec{e}}_\varphi(t) - z_0 k^2\omega^2 e^{-k\omega t}\vec{e}_z$$

$$= \underline{\underline{2v_0\omega\vec{e}_\varphi(t) - (v_0 t + R)\omega^2\vec{e}_r(t) - z_0 k^2\omega^2 e^{-k\omega t}\vec{e}_z}}$$

(b) Forderung: $z(t_E) \overset{!}{=} \frac{1}{2}z_0 \Rightarrow z_0(1-e^{-k\omega t_E}) = \frac{1}{2}z_0$

$$\Rightarrow e^{-k\omega t_E} = \frac{1}{2} \Rightarrow -k\omega t_E = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t_E = -\frac{1}{k\omega}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{k\omega}\ln(2)}}$$

(c) Forderung: $r_s(t_E) \overset{!}{=} \ell + R \Rightarrow v_0 t_E + R \overset{!}{=} \ell + R$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_0}} = \frac{\ell}{t_E} = \underline{\underline{\frac{k\omega\ell}{\ln(2)}}}$$

$$v_E = |\vec{v}(t_E)|$$

mit $\vec{v}(t_E) = v_0\,\vec{e}_r(t_E) + (v_0 t_E + R)\omega\,\vec{e}_\varphi(t_E) + z_0 k\omega e^{-k\omega t_E}\vec{e}_z$

$$= \frac{k\omega\ell}{\ln(2)}\,\vec{e}_r(t_E) + (\ell + R)\omega\,\vec{e}_\varphi(t_E) + \frac{1}{2} z_0 k\omega\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow v_E = \sqrt{\left(\frac{k\omega\ell}{\ln(2)}\right)^2 + (\ell+R)^2\omega^2 + \frac{1}{4} z_0^2 k^2\omega^2}$$