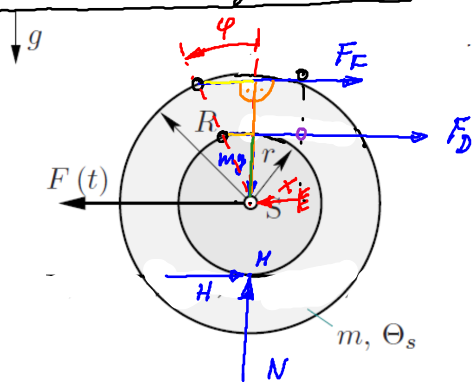
13. Übung:

Themen: WH erzwungene Schwingungen mit 1 Fhg; freie ungedämpfte Schwingungen mit 2 Fhgen!

Aufgabe 159: Klausuraufgabe aus SoSe 2017

(a) Nichtlineare Bewegungsdgl.

Freischnitt in der ausgelenkten Lage



Schwerpunktsatz und Drallsatz

$$m\ddot{x} = F(t) - F_F - F_D - H \quad (1) \quad // \cdot r$$

$$\Theta_S \ddot{\varphi} = \sum M^{(S)} = -F_F \cdot R\cos\varphi - F_D\, r\cos\varphi + H r \quad (2)$$

Kinematische Beziehung

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \quad (3)$$

$$[\, x = r\varphi \,]$$

Elimination von H in (1) und (2), bzw. Einsetzen von (3)

(1)·r + (2) mit (3) ⇒

$$(m r^2 + \Theta_S)\ddot{\varphi} = -F_F\,(r + R\cos\varphi) - F_D\,(\cancel{r} + \cancel{r}\cos\varphi) + F(t)\cdot r \quad (4)$$

Kraftgesetze:

$$F_F = c^* \cdot (x + R\sin\varphi) \qquad \text{mit } \frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \Rightarrow c^* = \frac{c}{2}$$

$$= \frac{c}{2}\cdot(r\varphi + R\sin\varphi) \quad (5)$$

$$F_D = d\,(x + r\sin\varphi)^{\cdot} = d\,r\,(\varphi + \sin\varphi)^{\cdot}$$

$$= d\,r\,(\dot{\varphi} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}) = d\,r\,\dot{\varphi}\,(1+\cos\varphi) \quad (6)$$

(5) und (6) in (4) ⇒

$$(m r^2 + \Theta_S)\ddot{\varphi} + d\,r^2\dot{\varphi}\,(1+\cos\varphi)^2 + \frac{c}{2}\,(r\varphi + R\sin\varphi)\cdot(r + R\cos\varphi) = F(t)\cdot r \quad (7)$$

Vorgaben berücksichtigen: $R = 2r$, $\Theta_S = 2mr^2$

$$3 m r^2 \ddot{\varphi} + d\,r^2\dot{\varphi}\,(1+\cos\varphi)^2 + \frac{c}{2}\,r^2\,(\varphi + 2\sin\varphi)(1 + 2\cos\varphi) = F(t)\cdot r \quad (8)$$

(b) Linearisierung um $\varphi_0 = 0$

$\sin\varphi \simeq \varphi$; $\cos\varphi \approx 1$; $\sin\varphi\cos\varphi \simeq \varphi\cdot 1$; $\cos^2\varphi \approx 1$

$$3 m r^2\ddot{\varphi} + d\,r^2\dot{\varphi}\,(1+1)^2 + \frac{c}{2}r^2\,(\varphi + 2\varphi)(1+2) = F(t)\cdot r$$

$$3 m r^2\ddot{\varphi} + 4 d r^2\dot{\varphi} + \frac{9c}{2}r^2\varphi = F(t)\cdot r \quad //:(3mr^2)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{4d}{3m}}_{=2\delta}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{3c}{2m}}_{\omega_0^2}\varphi = \frac{F_0}{3mr^{\cancel{2}\,1}}\cos(\Omega t)\cdot\cancel{r}\,1} = \mathrm{Re}\left\{\frac{F_0}{3mr}\,e^{i\Omega t}\right\}$$

(c) Abklingkonstante: $2\delta = \dfrac{4d}{3m} \Rightarrow \underline{\underline{\delta = \dfrac{2d}{3m}}}$

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$T_D = \frac{1}{f_D} \qquad 2\pi\frac{1}{T_D} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$T_D = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3c}{2m} - \left(\frac{2d}{3m}\right)^2}}}}$$

(d) $V(\eta) = ?$

Ersatzdgl: $$\ddot{\tilde\varphi} + 2\delta\dot{\tilde\varphi} + \omega_0^2\tilde\varphi = \frac{F_0}{3mr} e^{i\Omega t} \quad (9)$$

Exponentialansatz: $$\tilde\varphi = \hat\varphi e^{i\Omega t} \quad \text{mit} \quad \hat\varphi = |\hat\varphi| \cdot e^{-i\delta} \in \mathbb{C} \quad (10)$$

Komplexe Amplitude: (10) in (9):
$$\dot{\tilde\varphi} = i\Omega\hat\varphi e^{i\Omega t}$$
$$\ddot{\tilde\varphi} = i^2\Omega^2\hat\varphi e^{i\Omega t} = -\Omega^2\hat\varphi e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 + 2\delta\Omega i + \omega_0^2)\hat\varphi e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{3mr} e^{i\Omega t}$$

$$\hat\varphi = \frac{F_0}{3mr}\frac{1}{\omega_0^2-\Omega^2+2\delta\Omega i} = \frac{F_0}{3mr\omega_0^2}\frac{1}{1-\eta^2+2D\eta i}$$

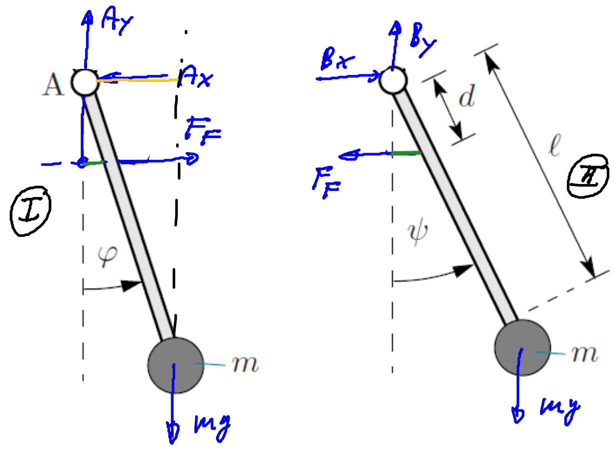
mit $D = \frac{\delta}{\omega_0}$

Betrag der Amplitude: $$|\hat\varphi| = \frac{F_0}{3mr\omega_0^2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}}_{=V(\eta)}$$ Vergrößerungsfunktion!

Aufgabe 200: Aufgabe aus der Vorlesung

(a) Bewegungsdifferentialgleichungssystem

Freischnitt:



Drallsatz bzgl. Aufhängepunkte

$$\Theta_A\ddot\varphi = +F_F d\cos\varphi - mgl\sin\varphi \quad (1)$$
$$\Theta_B\ddot\psi = -F_F d\cos\psi - mgl\sin\psi \quad (2)$$
$$\Theta_A = ml^2 = \Theta_B \quad (3)$$

Kraftgesetze:

$$F_F = k(d\sin\psi - d\sin\varphi) \quad (4)$$

(4),(3) in (1) und (2)

$$ml^2\ddot\varphi - kd^2(\sin\psi - \sin\varphi)\cos\varphi + mgl\sin\varphi = 0 \quad (5)$$
$$ml^2\ddot\psi + kd^2(\sin\psi - \sin\varphi)\cos\psi + mgl\sin\psi = 0 \quad (6)$$

Linearisierung: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\sin\psi \approx \psi$
$\cos\varphi \approx 1$, $\cos\psi \approx 1$

$$ml^2\ddot\varphi - kd^2(\psi - \varphi) + mgl\varphi = 0 \iff \boxed{ml^2\ddot\varphi + (kd^2+mgl)\varphi - kd^2\psi = 0}$$
$$ml^2\ddot\psi + kd^2(\psi - \varphi) + mgl\psi = 0 \iff \boxed{ml^2\ddot\psi - kd^2\varphi + (kd^2+mgl)\psi = 0} \quad (7)$$

Matrizenform von (7)

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kd^2+mgl & -kd^2 \\ -kd^2 & kd^2+mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(b) Eigenkreisfrequenzen, Eigenformen, allg. Lsg.

Ansatz: $\varphi(t) = A\cos(\omega t) \implies \ddot\varphi(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t)$
$\psi(t) = C\cos(\omega t) \implies \ddot\psi(t) = -\omega^2 C\cos(\omega t)$

$$\iff \begin{pmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot\psi \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}\cos\omega t$$

Einsetzen in (8):

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \cos(\omega t) + \begin{bmatrix} kd^2+mgl & -kd^2 \\ -kd^2 & kd^2+mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \cos(\omega t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -ml^2\omega_1^2+kd^2+mgl & -kd^2 \\ -kd^2 & -ml^2\omega^2+kd^2+mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Einsichtige Lsg ist die triviale Lsg. $A=C=0$!
Aber dann schwingt nichts!

Nichttriviale Lösungen existieren nur dann, wenn die Koeffizientenmatrix singulär wird/ist:

$$\mathrm{Det} \begin{bmatrix} -ml^2\omega^2+kd^2+mgl & -kd^2 \\ -kd^2 & -ml^2\omega^2+kd^2+mgl \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(-ml^2\omega^2+kd^2+mgl)^2 - (kd^2)^2 = 0$$

$$(kd^2+mgl-ml^2\omega^2)^2 = (kd^2)^2$$

$$|kd^2+mgl-ml^2\omega^2| = kd^2$$

1. Lsg: $kd^2+mgl > ml^2\omega^2$

$$\cancel{kd^2}+mgl-ml^2\omega_1^2 = \cancel{kd^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{g/l} \quad (10)$$

2. Lsg: $kd^2+mgl < ml^2\omega^2$

$$-(kd^2+mgl-ml^2\omega_2^2) = kd^2$$

$$ml^2\omega_2^2 = 2kd^2+mgl \quad (11)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\left(\frac{d}{l}\right)^2}$$

A und C sind abhängig voneinander. Zur Bestimmung des Verhältnisses müssen die Eigenkreisfrequenzen ω_1 (bzw ω_2) in eine der skalaren Glgn. aus dem Alg. Gleichungssystem (9)!

1. $\omega_1 = \sqrt{g/l}$:

$$(-ml^2\omega_1^2+kd^2+mgl)A_1 - kd^2 C_1 = 0$$

$$(-\cancel{ml^2(\sqrt{g/l})^2}+kd^2+\cancel{mgl})A_1 - kd^2 C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = C$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \varphi(t) &= A_1\cos(\omega_1 t) \\ \psi(t) &= A_1\cos(\omega_1 t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_1 = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{g/l}$$

2. $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2}$: . . . $\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}_2 = A_2 \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cos(\omega_2 t)$

zwei weitere unabhängige Lösungen erhalten wir durch einen Sinusansatz!

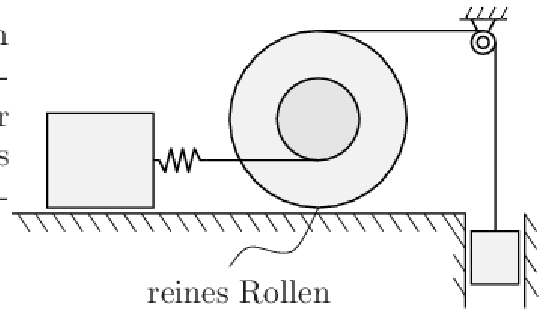
$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}_3 = B_1 \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\sin(\omega_1 t) \quad ; \quad \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}_4 = B_2 \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\sin(\omega_2 t)$$

Allgemeine Lsg. ist die Superposition aller unabhängigen Teillösungen:

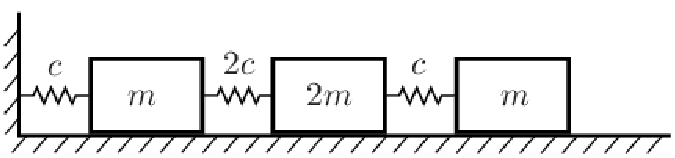
$$\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}_{\text{1. Eigenvektor (gleichphasiges Schwingen)}}\left(A_1\cos(\omega_1 t) + B_1\sin(\omega_1 t)\right) + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}}_{\text{2. Eigenvektor (gegenphasiges Schwingen)}}\left(A_2\cos(\omega_2 t) + B_2\sin(\omega_2 t)\right)$$

1. Das dargestellte ebene System besteht aus einem starren Klotz, der nur horizontal rutscht, einem starren, rein rollenden Rad und einem starren Klotz, der sich nur vertikal bewegt, sowie einem idealen, stets gespannten Seil und einer Feder. Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

   Antwort: Es hat ☐ Freiheitsgrade.



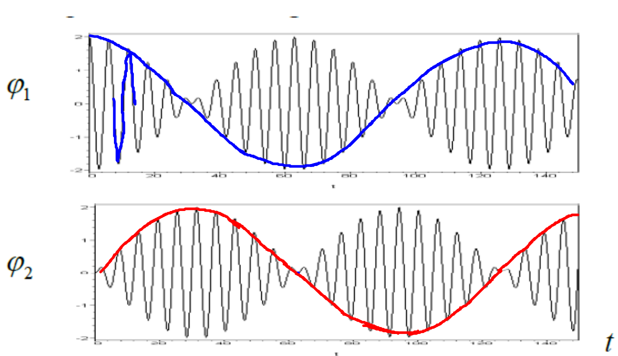
2. Geben Sie die Anzahl der Eigenfrequenzen und Eigenformen des gezeigten Systems an:



1.) Anzahl der Eigenfrequenzen: ☐

2.) Anzahl der Eigenformen: ☐

Schwebung der Pendel bei leicht unterschiedlichen Eigenkreisfrequenzen und geeigneten Anfangsbedingungen:



$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \quad \Delta\omega \ll \omega_1$

$\varphi(0) = \varphi_0$
$\psi(0) = 0$
$\dot\varphi(0) = 0$
$\dot\psi(0) = 0$

Die Bewegung jedes Pendels beschreibt eine Schwebung (siehe Bild)