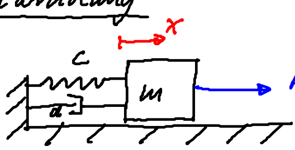
Wiederholung



$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

Ω : Erregerkreisfrequenz

Bewegungsdgl.: $\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$ (1) mit $\delta = \frac{d}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$

Allg. Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ (2)

mit $x_h(t) = e^{-\delta t}\left(A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)\right)$ (3) mit $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\omega_D = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}$$

$$= \omega_0\sqrt{1-D^2}$$

mit $\boxed{x_p(t) = |\hat{z}(\Omega)| \cos(\Omega t - \varphi(\Omega))}$ (4)

$D := \frac{\delta}{\omega_0}$ Dämpfungsgrad

wobei $|\hat{z}(\Omega)| = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\frac{\delta}{\omega_0}\cdot\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}$

Frequenzverhältnis / Abstimmung: $\eta := \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$\boxed{|\hat{z}(\eta)|} = \frac{F_0}{\cancel{m}}\frac{\cancel{m}}{c}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}}_{=V(\eta)} = \boxed{\frac{F_0}{c}V(\eta)} \quad (5)$$

Auslenkung der Feder bei statischer Belastung mit F_0!

$$\boxed{V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}} \quad (6)$$

Merke: Die Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ gibt das Verhältnis der Schwingungsamplitude $|\hat{z}(\eta)|$ zur statischen Auslenkung an!

Phasenverschiebung: $$\boxed{\tan\varphi} = \frac{-\operatorname{Im}\{\hat{z}\}}{\operatorname{Re}\{\hat{z}\}} = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2} = \frac{2\frac{\delta}{\omega_0}\frac{\Omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} = \boxed{\frac{2D\eta}{1-\eta^2}} \quad (7)$$

Zusammenfassung:

Erregung: $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ $\longrightarrow$ Antwort: $$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{c}V(\eta)\cos(\Omega t - \varphi(\eta))}$$ (8)

Achtung: Nach (8) sind Amplitude und Phase abhängig von der Erregerfrequenz!

Graphische Darstellung von $V(\eta)$

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$$

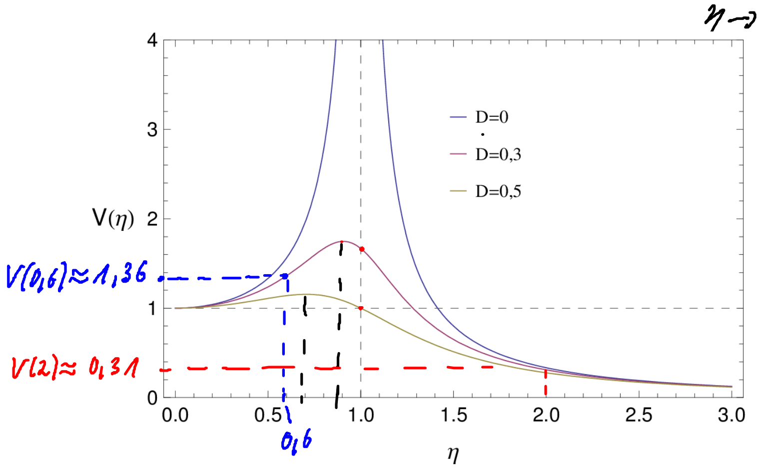
$V(0) = 1$

$V(1) = \frac{1}{2D}$ für $D \neq 0$

für $D=0$ hat $V(\eta)$ bei $\eta = 1$ eine Polstelle ohne VZ-Wechsel

$$\lim_{\eta\to 1^\pm} V(\eta) = \infty$$

$$\lim_{\eta\to\infty} V(\eta) = \lim_{\eta\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}} = 0^+$$



Diskussion: Annahme $\underline{D=0{,}3}$, $\omega_0 = 1\ 1/s$

① $\underline{\Omega = 0{,}6\,\omega_0 \Rightarrow \eta = 0{,}6}$ $\underline{\text{Gesucht:}}$ Schwingung im eingeschwungenen Zustand

$$x_p(t) = \frac{F_0}{c}\,\underline{V(\eta=0{,}6)}\cdot\cos(\Omega t - \varphi(\eta=0{,}6))$$

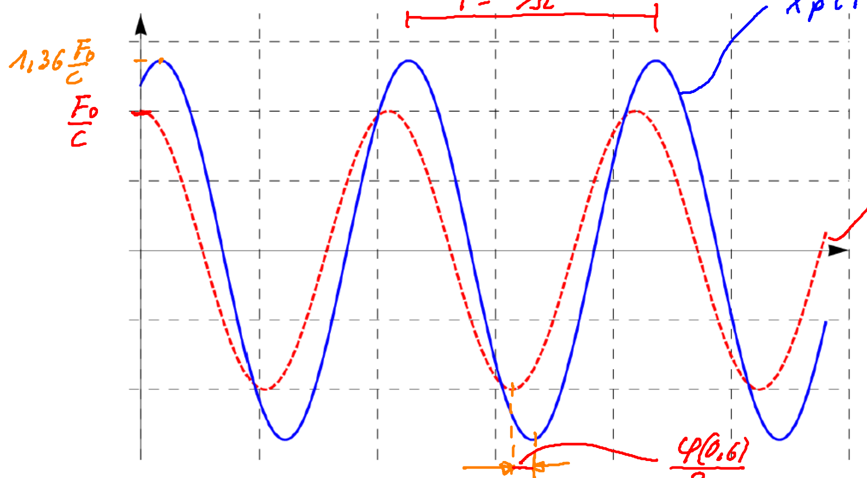
$V(0{,}6) \approx \underline{1{,}36}$; $\varphi(0{,}6) \approx 0{,}52$

Die Antwort des gedämpften 1-Massenschwingers auf eine harmonische Krafterregung der Form $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ lautet

$$x_p(t) = \frac{F_0}{c}V(\eta)\cos(\Omega t - \varphi(\eta)) = \frac{F_0}{c}V(\eta)\cos\left[\Omega\left(t - \frac{\varphi(\eta)}{\Omega}\right)\right].$$

Verschiebung nach rechts

Darin beschreibt $V(\eta)$ die Vergrößerungsfunktion (Vergrößerung der Amplitude der Schwingung im Vergleich zur statischen Auslenkung F_0/c) und $\varphi(\eta)$ die Phasenverschiebung.



$F(t) = F_0\cos(\Omega t)$

$\frac{F(t)}{c} = \frac{F_0}{c}\cos(\Omega t)$

— Antwort des Systems $x_p(t)$

Abb. 1 Wegnormierte Erregung (rot strichliert) und Antwort des 1-Massen-Schwingers (blau) für eine Erregung mit der Abstimmung $\eta = 0.6$; $V(\eta = 0.6) \approx 1.36$, $\varphi(\eta = 0.6) \approx 0.52$; $D = 0.3$ gewählt.

② $\underline{\Omega = 2\,\omega_0\ ,\ \eta = 2}$

$V(2) \approx 0{,}31$, $\varphi(2) \approx 2{,}76$

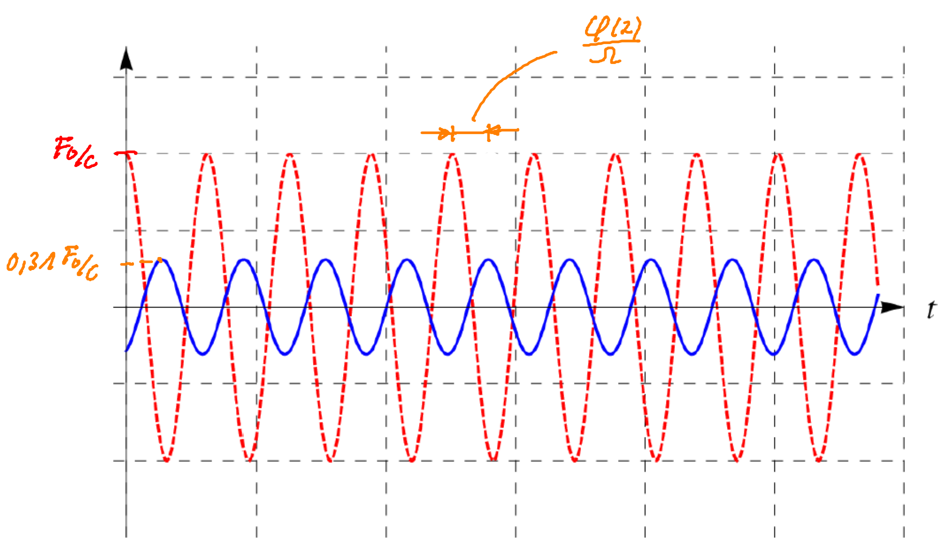


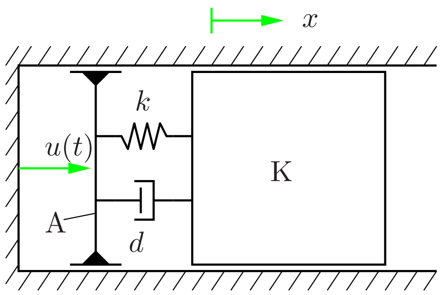
Abb. 2 Normierte Erregung (rot strichliert) und Antwort des 1-Massen-Schwingers (blau) für eine Erregung mit der Abstimmung $\eta = 2.0$; $V(\eta = 2.0) \approx 0.31$, $\varphi(\eta = 2.0) \approx 2.76$; $D = 0.3$ gewählt.

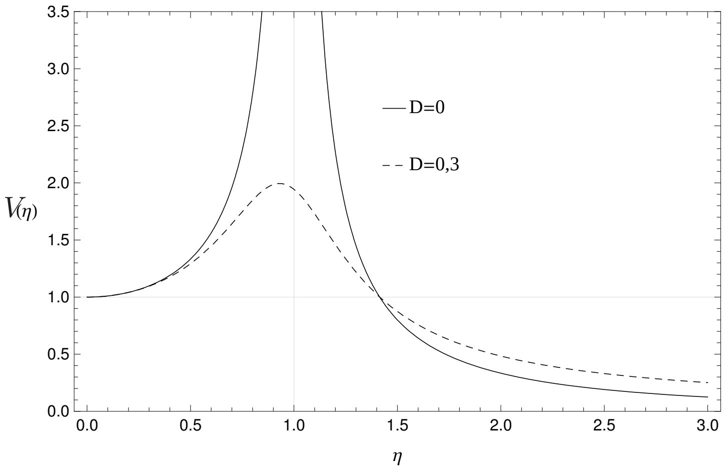
22. Vorlesung

1. Ein Körper K mit der Masse m ist über eine Feder und einen Dämpfer mit dem Anregungskolben A verbunden, der eine vorgegebene schwingende Bewegung $u(t) = \hat{u}\cos(\Omega t)$ ausführt. $x(t)$ bezeichnet die Verschiebung des Körpers K gegen den spannungslosen Ruhezustand. Die Bewegungsdifferenzialgleichung des Systems lautet:

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = d\dot{u}(t) + ku(t)$$

Die Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ des Systems ist für den ungedämpften Fall und einen schwach gedämpften Fall skizziert.





(a) Wie groß ist die **Eigen**frequenz f des gedämpften Systems?

☐ $f = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ☐ $f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d}{2m}}$ ☐ $f = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$

☐ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ ☐ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$ ☐ $f = \frac{1}{2\pi}\Omega$

(b) Nun werde das System mit der Kreisfrequenz $\Omega = 2\omega_0$ erregt. Durch welche Maßnahme kann man bei dieser Erregerkreisfrequenz die Amplituden verringern?

☐ Die Dämpfung verringern. ☐ Die Dämpfung vergrößern.