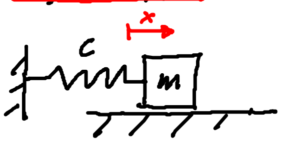
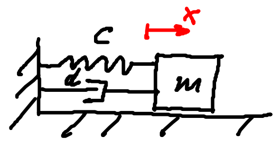
Themen: Freie Schwingungen, erzwungene Schwingungen

1. Wiederholung: Freie Schwingungen

ungedämpft



gedämpft



Bewegungsdgl.

(mittels Freischnitt und SPS und DS)

ungedämpft:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \qquad (1_A)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

gedämpft:

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \qquad (1_B)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit $\delta = \frac{d}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$

δ: Abklingkonstante

ω_0: Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$[\omega_0] = \frac{1}{s}$

$[\delta] = \frac{1}{s}$

$D := \frac{\delta}{\omega_0}$ Dämpfungsgrad

$[D] = 1$

Lösung der Bewegungsdgl

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(A\cos(\omega_D t) + B\sin(\omega_D t)\right)$$

ω_D: Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

$$\boxed{\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \omega_0\sqrt{1-D^2}$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$$

Schwingungsdauer und Frequenz

$\omega = 2\pi f \Longleftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$ $\qquad f$: Eigenfrequenz

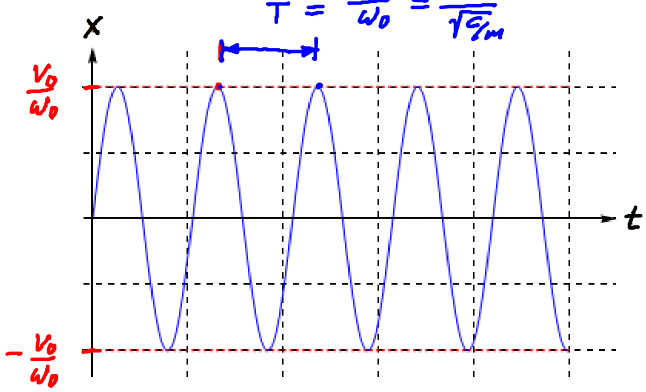
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ $\qquad T$: Schwingungsperiode / -dauer

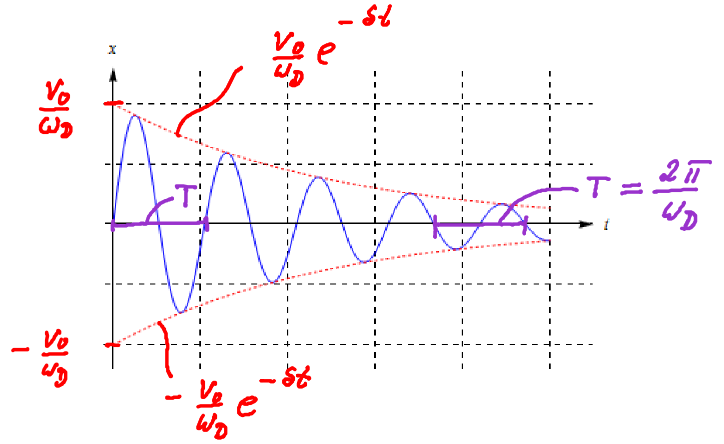
Beispiel: Anfangsbedingungen

$$x(0)=0\,,\quad \dot{x}(0)=v_0$$

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad (2_A)$$

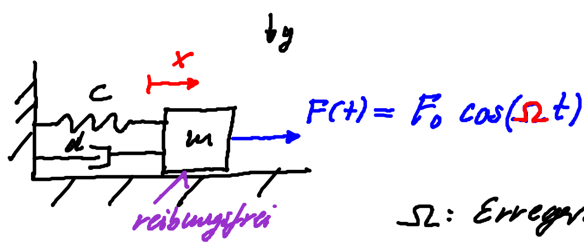
$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_D}e^{-\delta t}\sin(\omega_D t) \qquad (2_B)$$





---

2. Erzwungene Schwingungen / fremderregte Schwingungen

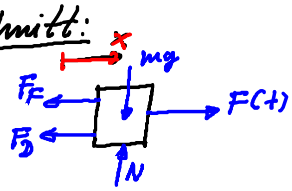


Ω: Erregerkreisfrequenz

> **Merke:** Ein fremderregtes System schwingt nach kurzer Zeit [Einschwingdauer] immer mit der Erregerfrequenz $f_{err}=\frac{\Omega}{2\pi}$.

Bewegungsdgl:

Freischnitt:



Schwerpunktsatz:

$$m\ddot{x}=-F_F-F_D+F(t)$$

Kraftgesetz:

$$F_F=cx$$
$$F_D=d\dot{x}$$

$$m\ddot{x}+d\dot{x}+cx=F_0\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x}+\frac{d}{m}\dot{x}+\frac{c}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)=\mathrm{Re}\left\{\frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}\right\}} \qquad (3)$$

$$e^{i\Omega t}=\cos(\Omega t)+i\sin(\Omega t)$$
$$i^2=-1$$

Anstelle der DGL (3) lösen wir die komplexe DGL (Ersatzdgl.)

$$\ddot{z}_p+2\delta\dot{z}_p+\omega_0^2z_p=\frac{F_0}{m}e^{i\Omega t} \qquad (4) \qquad \text{mit } z_p=x_p+iy_p$$

Die Lösung von (3) setzt sich aus der Lsg der homogen DGL (2_B) und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zusammen:

$\Re\{\text{Glg.}(4)\} = \text{Glg.}(3)$ $\qquad x(t) = x_{hom}(t) + x_p(t)$

Im Anschluss ziehen wir von der Lsg. einfach den Realteil

$$\boxed{x_p(t) = \Re\{z_p(t)\}} \quad (5)$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite von (4):

$$z_p(t) = \hat{z}\, e^{i\Omega t} \quad (6) \quad \text{mit } \hat{z} \in \mathbb{C}, \text{ d.h. } \hat{z} = |\hat{z}|\, e^{-i\varphi}$$

$$\dot{z}_p(t) = \hat{z}\, i\Omega\, e^{i\Omega t} = i\Omega\, \hat{z}\, e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{z}_p(t) = i^2\Omega^2\, \hat{z}\, e^{i\Omega t} = -\Omega^2\, \hat{z}\, e^{i\Omega t}$$

Einsetzen in (4) $\Rightarrow$

$$(-\Omega^2 + 2\delta i\Omega + \omega_0^2)\, \hat{z}\, e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{z} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta\Omega i}} \quad (7)$$

Mathe: $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$, $z_i \in \mathbb{C}$, $|z_3| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Bestimmung von $|\hat{z}|$ (Amplitude) und φ (Phase):

$$\underbrace{\boxed{|\hat{z}| = \frac{F_0}{m}\, \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}}}_{\text{Schwingungsamplitude}} \quad (8)$$

$$\tan\varphi = \frac{-\Im\{\hat{z}\}}{\Re\{\hat{z}\}}$$

$$\hat{z} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta\Omega i}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\delta\Omega i)\cdot(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta\Omega i)} = \frac{F_0}{m}\, \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta\Omega i}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

$$\boxed{\tan\varphi} = \frac{-(-2\delta\Omega)}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \boxed{\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

$$\underbrace{\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)}}_{\text{Phase}}$$

Partikuläre Lsg:

$$x_p(t) = \Re\{z_p\} = \Re\{\hat{z}\, e^{i\Omega t}\} = \Re\{|\hat{z}|\, e^{-i\varphi} \cdot e^{i\Omega t}\} = \Re\{|\hat{z}|\, e^{i(\Omega t - \varphi)}\}$$

$$\boxed{x_p(t) = |\hat{z}(\Omega)| \cos(\Omega t - \varphi(\Omega))}$$

Abgesehen von einer anderen Amplitude und Phase schwingt das System so wie es erregt wurde

Achtung: Sowohl die Amplitude $|\hat{z}|$ als auch die Phase φ hängen von Ω ab!

Anregung: Video Tacoma Narrows-Bridge