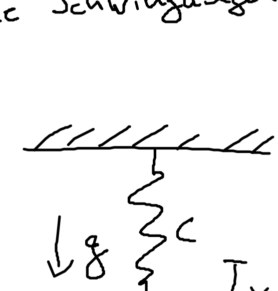
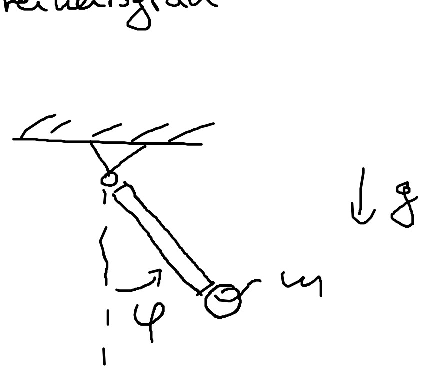
11. Plenarübung

Thema: Freie Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

Beispiele





Bei freien Schwingungen wird dem System einmalig Energie zugeführt (z. B. durch eine Anfangsauslenkung oder -geschwindigkeit) und dann sich selbst überlassen. Die Frequenz mit der es schwingt ist unabhängig von den Anfangsbed.. Diese Frequenz ist dem System eigen – die Eigenfrequenz.

Wichtige Zusammenhänge

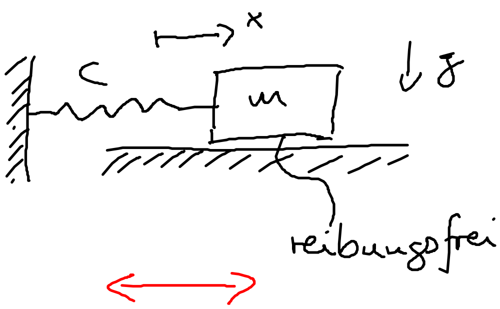
Frequenz: f – Schwingungen pro Sekunde $[f] = \frac{1}{s} = Hz$

Schwingungsdauer, Periode – $\boxed{T = \frac{1}{f}}$ – Zeit für eine Schwingung

Kreisfrequenz: $\boxed{\omega = 2\pi f}$

1. Freie ungedämpfte Schwingung

Bsp



geg: c, m, g

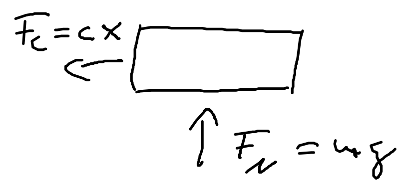
Anfangsbed.: $x(t=0) = x_0$

$\dot{x}(t=0) = 0$

ges: $x(t)$, Eigenfrequenz

Ständiger Austausch der potentiellen Energie der Feder und der kinetischen Energie der Masse.

Freischnitt



Impulssatz: $m\ddot{x}(t) = \sum F_x = -cx$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2} x = 0}$$

Bewegungs-DGL 2. Ordnung, linear

ω_0 – Eigenkreisfrequenz

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Lösen der DGL

Ansatz: $x(t) = A e^{\lambda t}$, $\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

Einsetzen in DGL: $\underbrace{(\lambda^2 + \omega_0^2)}_{\stackrel{!}{=}0} \underbrace{A e^{\lambda t}}_{>0} = 0$

| Imaginäre Einheit

$\lambda^2 + \omega_0^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 = i^2 \omega_0^2$ $\quad$ $i^2 = -1$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$

Allgemeine Lösung ist Superposition:

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

$$\boxed{\text{Eulersche Formel:} \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow x(t) = A\left(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\right) + B\left(\underbrace{\cos(-\omega_0 t)}_{\cos(\omega_0 t)} + i\underbrace{\sin(-\omega_0 t)}_{-\sin(\omega_0 t)}\right)$$

$$= \underbrace{(A+B)}_{C_1}\cos(\omega_0 t) + \underbrace{(A-B)i}_{C_2}\sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)}$$

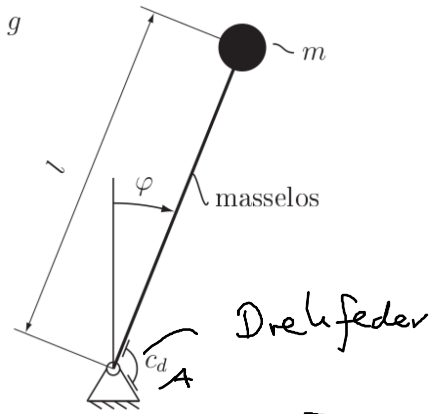
Anfangsbed.: $x(t=0) = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0$

$\dot{x}(t) = -C_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + C_2\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

144. Gegeben ist ein mathematisches Überkopfpendel mit Pendelmasse m und reibungsfrei drehbarer masseloser Stange der Länge l. Eine Drehfeder (Rückstellmoment $M = c_d\,\varphi$) wirkt rückstellend.



(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung in φ her.

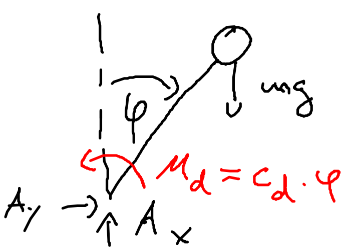
(b) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Winkel φ.

(c) Wie groß muss c_d sein, damit es zu einer Schwingung um $\varphi = 0$ kommen kann (ausgehend von der linearen Bewegungsgleichung aus Aufgabenteil (b))?
Schreiben Sie dazu die Bewegungsgleichung in die Form $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ um und geben Sie ω_0^2 an.

$[c_d] = Nm$

Geg.: m, l, g, c_d (außer in Aufgabenteil (c))

Freischnitt am ausgelenkten System



Drehimpulssatz um A

$$\Theta^{(A)}\ddot{\varphi} = -c_d\varphi + mgl\sin\varphi$$

MTM Θ^A

Annahme: Punktmasse

$$\Theta^{(A)} = ml^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{c_d}{ml^2}\varphi - \frac{mgl}{ml^2}\sin\varphi = 0}$$

Bewegungs-DGL, 2. Ordnung, nichtlinear! $\Rightarrow$ Lösung schwierig!

Linearisierung der DGL für kleine φ

Es gilt: $\boxed{\begin{array}{l}\sin\varphi \approx \varphi \\ \cos\varphi \approx 1\end{array}}$

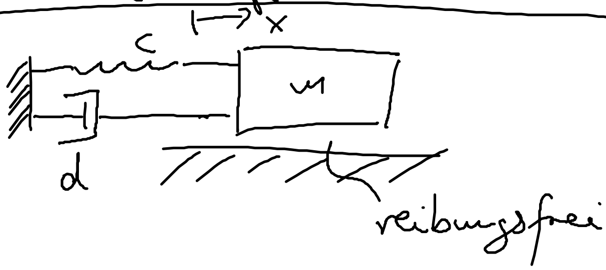
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{c_d - mgl}{ml^2}}_{\omega_0^2}\varphi = 0}$$

Linearisierte DGL, 2. Ordnung

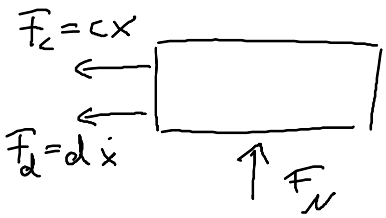
$$\omega_0^2 = \frac{c_d - mgl}{ml^2}$$

Schwingungen falls $\omega_0^2 > 0$! $\Rightarrow \boxed{c_d > mgl}$

2. Freie gedämpfte Schwingungen



Freischnitt



Impulssatz

$$m\ddot{x} = \sum F_x = -cx - d\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{d}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2}x = 0$$

$\delta = \frac{d}{2m}$ – Abklingkonstante $[\delta] = \frac{1}{s}$

ω_0 – Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ – DGL, 2. Ordnung, linear

Lösung: Ansatz $x(t) = A e^{\lambda t}$

Einsetzen: $\underbrace{(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)}_{\stackrel{!}{=}0} A e^{\lambda t} = 0$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Fall schwacher Dämpfung: $\boxed{\delta^2 < \omega_0^2}$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega_d}$$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems

Allgemeine Lösung

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} = A e^{-\delta t + i\omega_d t} + B e^{-\delta t - i\omega_d t}$$

$$= e^{-\delta t}\Big(\underbrace{A e^{i\omega_d t} + B e^{-i\omega_d t}}_{\text{wie im ungedämpften Fall, nur } \omega_d \text{ statt } \omega_0}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 \cos(\omega_d t) + c_2 \sin(\omega_d t)\right)}$$