Erzwungene Schwingungen (eine beliebige Kraft)

Die Bewegungsgleichung $\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{1}{m}F(t)$ kann auch bei beliebiger äußerer Kraft *F(t)* in allgemeiner Form integriert werden. Das ist leicht auszuführen, wenn man die Gleichung zunächst in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}+i\omega_0 x\right)-i\omega_0\left(\dot{x}+i\omega_0 x\right)=\frac{1}{m}F(t) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}\xi-i\omega_0\xi=\frac{1}{m}F(t) \tag{1}$$

schreibt, wo die komplexe Größe

$$\xi=\dot{x}+i\omega_0 x \tag{2}$$

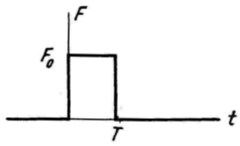
eingeführt worden ist. Die Gleichung (1) ist nicht mehr von zweiter, sondern nur noch von erster Ordnung. Indem wir die Identität $\frac{d\xi}{dt}-i\omega_0\xi=e^{i\omega_0 t}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega_0 t}\xi\right)$ benutzen und die Gleichung

$e^{i\omega_0 t}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega_0 t}\xi\right)=\frac{1}{m}F(t)$ integrieren, erhalten wir

$$\boxed{\xi=e^{i\omega_0 t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega_0 t}dt+\xi_0\right\}} \tag{3}$$

hierin ist die Integrationskonstante ξ_0 so gewählt, dass sie den Wert von ξ im Zeitpunkt $t = 0$ darstellt. Das ist die gesuchte allgemeine Lösung; die Funktion $x(t)$ ergibt sich als Imaginärteil des Ausdrucks (3) (geteilt durch ω_0)[1].

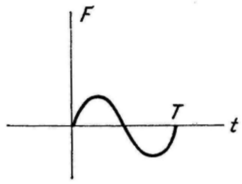
Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude eines Systems nach Einwirkung einer äußeren Kraft F_0, die während einer begrenzten Zeit T wirkt.



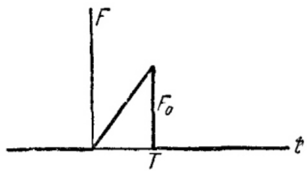
Hinweise: 1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung (3) die Variable ξ zum Zeitpunkt $t=T$

2. Daraus könnten Sie die Werte $x(T)$ und $v(T)$ bekommen, brauchen dies aber nicht zu machen, da die Schwingungsamplitude $a=\sqrt{x(T)^2+v(T)^2/\omega_0^2}=|\xi|/\omega_0$ sich durch den Betrag der komplexen Zahl ξ ausdrückt.

Aufgabe 2: Dasselbe für den Fall, dass sich die Kraft in der Zeit von Null bis $T=2\pi/\omega_0$ nach dem Gesetz $F=F_0\sin\omega_0 t$ ändert.



Aufgabe 3: Dasselbe für den Fall, dass sich die Kraft wie im Bild rechts skizziert ändert.



Aufgabe 4: Bestimmen Sie die erzwungenen Schwingungen bei Anwesenheit von geschwindigkeitsproportionaler Reibung unter der Wirkung der äußeren Kraft $F=F_0 e^{\alpha t}\cos\Omega t$.

[1] Dabei muss die Kraft $F(t)$ natürlich in reeller Form geschrieben werden.