TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme – Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Dr.-Ing. Markus Heß
M.Sc. Justus Benad
Josefine Wilhayn

Numerische Simulationsverfahren im Ingenieurwesen

Hausaufgabenblatt 4 WS 19/20

Thema: Elastische Gittermodelle

Theorieaufgabe 1 (2 Punkte)

Für ein dreieckiges Gitter sind die Gittereinheitsvektoren gegeben:

$$\vec{e}^{\,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{\,2} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{\,3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Prüfen Sie die Isotropieeigenschaften des Gitters, indem Sie die Koordinaten der ersten vier Gittertensoren gemäß

$$L_i := \sum_{\alpha=1}^{3} e_i^\alpha , \quad L_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{3} e_i^\alpha e_j^\alpha , \quad L_{ijk} := \sum_{\alpha=1}^{3} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha , \quad L_{ijkl} := \sum_{\alpha=1}^{3} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha$$

berechnen und angeben, welche der Gittertensoren isotrop sind.

Theorieaufgabe 2 (10 Punkte)

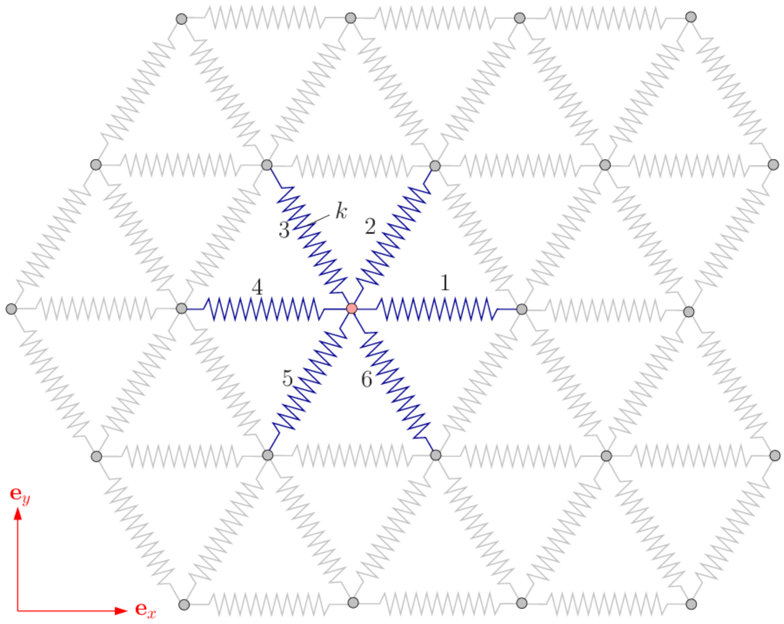
Mit Hilfe von elastischen Gittermodellen soll die Bewegung eines homogenen, isotropen, linear-elastischen Kontinuums abgebildet werden. Wir setzen ein zweidimensionales Kontinuum voraus, worunter eine *Scheibe* zu verstehen ist, in der bekanntermaßen ein Ebener Spannungszustand (ESZ) vorherrscht. Die Bewegung eines Punktes des Kontinuums gehorcht der Navier-Laméschen Verschiebungsdifferenzialgleichung:

$$\rho \ddot{u}_i \quad = \quad \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} . \tag{1}$$

Darin bezeichnen λ und μ die sogenannten Laméschen Konstanten. Im Falle des ebenen Spannungszustandes sind die Laméschen Konstanten wie folgt mit dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν miteinander verknüpft:

$$\lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} , \tag{2}$$

wobei G den Schubmodul meint. Im Folgenden soll ein hexagonales, elastisches Gittermodell dazu genutzt werden (siehe Abb. rechts), um makroskopisch das Verhalten der Scheibenelemente und damit die Bewegungsdifferenzialgleichung (1) unter Berücksichtigung der Materialparameter gemäß (2) abzubilden. Das Gittermodell besteht aus Massepunkten auf einem hexagonalen Gitter, die über linear-elastische Längsfedern der Länge ℓ und der Steifigkeit k miteinander wechselwirken. Die Wechselwirkungen sind auf die *nächsten* Nachbarn begrenzt.



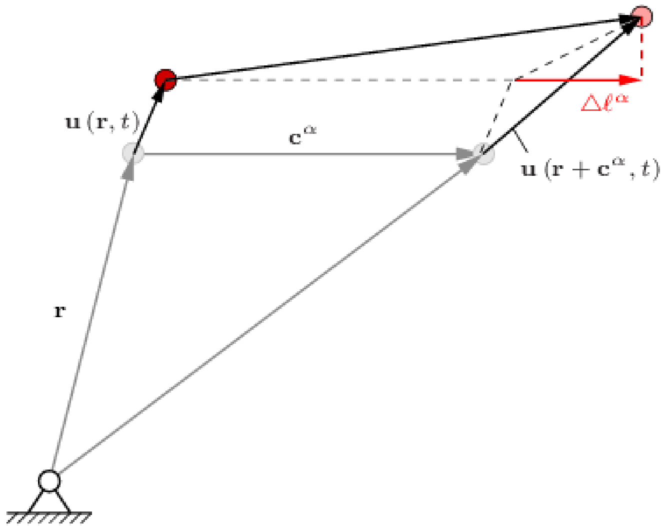
a) Stellen Sie die Koordinaten der Gittertensoren erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung auf, d.h. berechnen Sie

$$L_i := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha, \quad L_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha e_j^\alpha, \quad L_{ijk} := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha, \quad L_{ijkl} := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha \,. \tag{3}$$

b) Berechnen Sie die Längenänderungen der Federn $\Delta\ell^\alpha$ im Rahmen einer linearen Theorie, d.h. nutzen Sie als Näherung die Projektion der Differenz des Verschiebungsvektors auf die jeweilige Richtung der Gittervektoren:

$$\Delta\ell^\alpha \quad := \quad \left[u_i\left(\vec{r}+\vec{c}^{\,\alpha},t\right)-u_i\left(\vec{r},t\right)\right]e_i^\alpha \tag{4}$$

und entwickeln Sie den Ausdruck bis hin zu Gliedern der Ordnung ℓ^2. Zum besseren Verständnis ist die linearisierte Verschiebungskinematik nach Glg. (4) in nachfolgender Abbildung gezeigt.



c) Schneiden Sie einen Massepunkt aus dem Gitter heraus und stellen Sie das 2. Newtonsche Grundgesetz auf. Beachten Sie dabei, dass der Freischnitt nach Theorie 1. Ordnung am unverformten System erfolgt. Die Federkräfte haben dabei nur Komponenten in Richtung der Gittervektoren.

d) Setzen Sie die unter a) und b) berechneten Größen in das unter c) aufgestellte Newtonsche Grundgesetz ein und formen Sie die entstehende Differenzialgleichung derart um, dass abgesehen von den Koeffizienten die Lamé-Naviersche Bewegungsdifferenzialgleichung gemäß (1) wieder zu erkennen ist. Damit ist der Beweis vollbracht, dass das elastische Gittermodell makroskopisch die Bewegung des Kontinuums beschreibt.

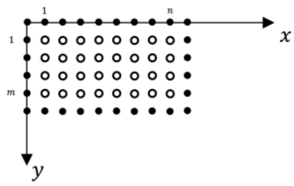
e) Welche Einschränkungen ergeben Sie für die elastischen Parameter E, ν bei dem zugrunde gelegten hexagonalen Gitter, welches nur Wechselwirkungen zu den nächsten Nachbarn berücksichtigt? Geben Sie eine Idee an, wie man diese Einschränkungen aufheben könnte.

Programmieraufgabe (18 Punkte)

Schreiben Sie eine Funktion `NumSimHA4(n,m,b,k,q,F,g,c)`, welche die Verformung einer linear elastischen, isotropen Scheibe in Figure 1 darstellt – je nach Wahl der Eingabeparameter für verschiedene Belastungen, Einspannungsarten, usw.:

`n,m`

Die Scheibe soll aus einem Gitter mit $m \times n$ inneren Punkten bestehen. Dabei ist $j = 1, 2, 3 \dots n$ der Index der Gitterpunkte in x-Richtung, und $i = 1, 2, 3 \dots m$ der Index der Gitterpunkte in y-Richtung. Wählen Sie $\Delta x = \Delta y = 1$, so dass für die nicht verformte Ausgangslage der Index j die Position der Gitterpunkte in x-Richtung und der Index i die Position der Gitterpunkte in y-Richtung angibt.

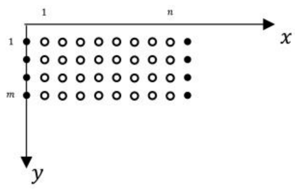


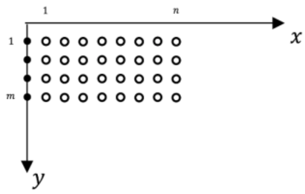
Die Funktion muss in dieser Hausaufgabe nur Eingaben korrekt ausführen, bei denen $n \geq m$ ist.

`b`

Ist $b = 1$ soll die Scheibe am linken Rand bei $x = 0$ und am rechten Rand bei $x = n + 1$ fest eingespannt sein. Der obere Rand bei $y = 0$ sowie der untere Rand bei $y = m + 1$ sollen frei sein.

Ist $b = 2$ soll die Scheibe nur am linken Rand bei $x = 0$ fest eingespannt sein. Der obere, untere und rechte Rand sollen frei sein.





`k,q,F,g`

An einigen Gitterpunkten an der freien Seite bei $y = 1$ sollen Kräfte angreifen. Diese Kräfte sollen nach unten gerichtet sein, also in die positive y-Richtung zeigen.

Ist $k = 1$, so soll an jedem von $2q + 1$ nebeneinanderliegenden Gitterpunkten die gleiche Kraft mit dem Betrag F angreifen (bei z.B. $q = 3$ drücken 7 nebeneinanderliegende Einzelkräfte, jeweils mit dem Betrag F, von oben auf die Scheibe). Der Mittelpunkt dieser konstanten Lastverteilung soll bei $x = n/2 + g$ liegen. Nehmen Sie es mit der Lage nicht zu genau und verwenden Sie z.B. einen Befehl wie `round()` wenn Diskretisierungen keine genauen Positionen zulassen.

Ist $k = 2$, so soll die Lastverteilung an $2q + 1$ nebeneinanderliegenden Gitterpunkten um den Mittelpunkt bei $x = n/2 + g$ nicht konstant sein, sondern mit

```
F./sqrt(1-((-q:q)/q).^2)
```

gewählt werden. Diese Verteilung hat an ihrem Anfang und Ende eine Singularität. Überschreiben sie diese einfach mit dem jeweiligen endlichen Nachbarn.

c

Die Scheibe wird wie folgt modelliert: An jedem inneren Gitterpunkt befindet sich eine Punktmasse. Diese ist über Federn zu all ihren 8 Nachbarn verbunden. Horizontale und vertikale Federn haben die Steifigkeit c, diagonale Federn haben die Steifigkeit $c/2$. Auch zu Gitterpunkten auf den festen Rändern sind die Punktmassen so verbunden. Bei freien Rändern gibt es natürlich keine Verbindungen zum Rand.

Tipps zum Vorgehen:

Stellen Sie für ein Beispielgitter für einige Gitterpunkte das Newtonsche Gesetz auf und überlegen Sie sich dann eine allgemeine Formulierung.

Es kann dabei hilfreich sein, das System zunächst in zwei Systeme aufzuteilen. Ein erstes System, in dem es nur vertikale und horizontale Federn gibt, und ein zweites, in dem es nur die diagonalen Federn gibt.

Für das erste System erhalten Sie dann z.B. in x-Richtung die folgende Bewegungsgleichung (für Punkte, die nicht in der Nähe vom Rand liegen):

$$m_{i,j}\ddot{u}_{i,j} = c\left[u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}\right] + F_{x,i,j}$$

Dabei ist u die Verschiebung eines Gitterpunktes in x-Richtung vom unverformten Zustand aus, und F_x eine beliebige äußere Kraft, welche in x-Richtung an einem Massenpunkt angreift.

In y-Richtung ergibt sich eine ähnliche Gleichung. Und auch für das zweite System erhalten Sie zwei Gleichungen, eine in x-, und eine in y-Richtung.

Schreiben Sie nun die Bewegungsgleichungen in Matrixform für irgendein Beispielsystem auf.

Für $n = m = 3$ könnte die grobe Struktur z.B. so aussehen:

$$\begin{bmatrix} m_{11}\ddot{u}_{11} \\ m_{12}\ddot{u}_{12} \\ m_{13}\ddot{u}_{13} \\ m_{21}\ddot{u}_{21} \\ m_{22}\ddot{u}_{22} \\ m_{23}\ddot{u}_{23} \\ m_{31}\ddot{u}_{31} \\ m_{32}\ddot{u}_{32} \\ m_{33}\ddot{u}_{33} \\ m_{11}\ddot{v}_{11} \\ m_{12}\ddot{v}_{12} \\ m_{13}\ddot{v}_{13} \\ m_{21}\ddot{v}_{21} \\ m_{22}\ddot{v}_{22} \\ m_{23}\ddot{v}_{23} \\ m_{31}\ddot{v}_{31} \\ m_{32}\ddot{v}_{32} \\ m_{33}\ddot{v}_{33} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \cdots & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \\ u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x,11} \\ F_{x,12} \\ F_{x,13} \\ F_{x,21} \\ F_{x,22} \\ F_{x,23} \\ F_{x,31} \\ F_{x,32} \\ F_{x,33} \\ F_{y,11} \\ F_{y,12} \\ F_{y,13} \\ F_{y,21} \\ F_{y,22} \\ F_{y,23} \\ F_{y,31} \\ F_{y,32} \\ F_{y,33} \end{bmatrix}$$

Dabei ist v die Verschiebung eines Gitterpunktes in y-Richtung vom unverformten Zustand aus, und F_y eine beliebige äußere Kraft, welche in y-Richtung an einem Massenpunkt angreift.

Achten Sie besonders darauf, dass die Bewegungsgleichungen, die in der Matrixgleichung dargestellt sind, auch an den Massepunkten des Systems gelten, die sich in der Nähe der Ränder befinden.

Erkennen Sie eine Struktur in der Matrix und bauen sie diese angepasst an die zuvor beschrieben Eingabeparameter in Matlab zusammen.

In dieser Hausaufgabe ist nur die Lösung des statischen Problems gefordert. Die Beschleunigungen dürfen also zu null gesetzt werden und das verbleibende lineare Gleichungssystem kann mit Matlab gelöst werden.

Achten Sie beim Bauen der Matrix und bei der Lösung auf eine effiziente Implementierung.

In Figure 1 sollen nach dem Ausführen der Funktion die Positionen der Gitterpunkte bei der gewünschten Belastung gezeigt werden. Verwenden Sie dazu einfach kleine schwarze Punkte. Die Ausgangslage der Gitterpunkte soll nicht geplottet werden. Die festen Einspannungen können z.B. über etwas dickere schwarze Punkte dargestellt werden. Orientieren Sie die Achsen wie in den drei kleinen Bildern weiter oben in der Aufgabenstellung. Verwenden Sie außerdem `axis equal; xlim([-0.5,n+20]);` und `ylim([-round(m/10), m+round(m/3)]);`.

Hinweise zur Abgabe der Programmieraufgabe:

Das Skript `NumSimHA4.m` bitte als Anhang einer E-Mail mit dem Betreff `NumSimHA4` an `j.benad@tu-berlin.de` senden.

Die Abgabedeadline ist der 13.01.2020 um 14^{15} Uhr.

Bitte in dem Skript die folgende Form verwenden:

```
% Nachname1    Matrikelnummer1   (Liste bitte alphabetisch nach Nachnamen ordnen)
% Nachname2    Matrikelnummer2
% Nachname3    Matrikelnummer3
% Nachname4    Matrikelnummer4

function NumSimHA4(n,m,b,k,q,F,g,c)

    % Hier den Code einfügen. Bitte gut kommentieren.

end
```