Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 11

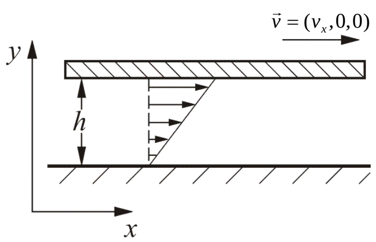
Viskose Flüssigkeiten

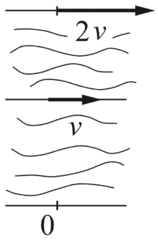
Lit.: Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4", Kapitel 1.3.3.1, 1.3.3.3, 1.3.3.4

I. Viskosität

Betrachten wir eine flüssige Schicht zwischen zwei ebenen, parallelen Platten. Die obere bewege sich horizontal mit der Geschwindigkeit v_x.

Viskose Flüssigkeiten haften an festen Oberflächen. Deshalb ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der unteren Platte Null und an der oberen v_x.





Die auf die obere Platte wirkende Tangentialkraft F ist proportional zum *Geschwindikeitsgradienten* $\partial v_x/\partial y$:

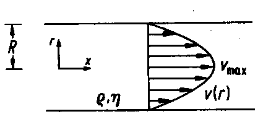
$$F=\eta\cdot A\cdot\frac{\Delta v_x}{\Delta y}=\eta\cdot A\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

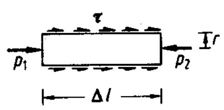
Dasselbe gilt für die Schubspannung:

$$\tau=\frac{F}{A}=\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

η heißt *dynamische Viskosität* der Flüssigkeit.

II. Strömung einer viskosen Flüssigkeit in einem kreiszylindrischen Rohr





Zu bestimmen sind Zusammenhänge zwischen Volumenstrom und der Druckdifferenz für eine stationäre Strömung einer viskosen Flüssigkeit in einem Rohr mit Radius *R*.

Lösung: Aus der Symmetrie folgt $v_x=v_x(r)$. Gemäß der Newtonschen Regel gilt für die Tangentialspannung $\tau(r)=\eta\dfrac{\partial v(r)}{\partial r}$.

Wir schneiden einen *koaxialen Zylinder* mit dem Radius r und Länge Δl frei und berechnen die auf ihn wirkenden Kräfte: viskose Kraft $F_{\text{visk}}=\tau\cdot A=\eta\dfrac{\partial v}{\partial r}\cdot 2\pi r\cdot\Delta l$ und Druckkraft $F_{\text{Druck}}=\pi r^2 p_1-\pi r^2 p_2$. Da sich die Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, muss die auf das gewählte Element wirkende Kraft verschwinden:

$$\pi r^2 p_1-\pi r^2 p_2+2\pi r\Delta l\eta\frac{\partial v}{\partial r}=0.$$

Daraus folgt $\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{p_1-p_2}{2\eta\Delta l}\cdot r=-\dfrac{\Delta p r}{2\eta\Delta l}$.

Unbestimmte Integration über *r* ergibt

$$v(r)=-\frac{\Delta p}{4\eta\Delta l}r^2+C.$$

Randbedingung: $v(R)=0\Rightarrow\ C=\dfrac{\Delta p}{4\eta\Delta l}\cdot R^2$;

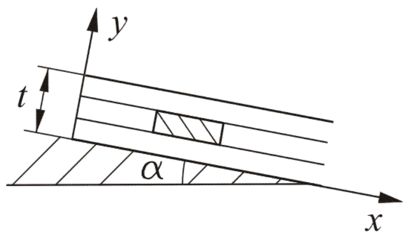
$$v(r)=\frac{R^2\Delta p}{4\eta\Delta l}\left[1-(r/R)^2\right].$$

Volumenstrom $\boxed{Q=\int_0^R 2\pi r v(r)\,dr=\dfrac{\pi R^4\Delta p}{8\eta\Delta l}}$.

Falls das Rohr geneigt ist, muss statt Δp $\Delta\tilde{p}=\Delta p+\rho g\Delta h$ genutzt werden.

III. Strömung in offenen Gerinnen

In einem geneigten Kanal (Breite *h*) fließt eine viskose Flüssigkeit. Zu bestimmen ist die Dicke der flüssigen Schicht für einen gegebenen Volumenstrom *Q*.



Lösung: Kräftegleichgewicht (*x-Richtung*) lautet: $\rho g\sin\alpha+\eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Daraus folgt

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\left(\dfrac{\rho g}{\eta}\right)\sin\alpha$. Zweifache Integration:

$$v=-\left(\frac{\rho g}{\eta}\right)\sin\alpha\cdot\frac{y^2}{2}+Cy+\cancel{D}$$

Randbdg. bei $y=0$

Randbedingungen.: $v(0)=0$;

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=t}=0\Rightarrow C=\sin\alpha\cdot\left(\frac{\rho g}{\eta}\right)\cdot t,$$

$$v(y)=\sin\alpha\cdot\left(\frac{\rho g}{\eta}\right)\cdot\left[ty-\frac{y^2}{2}\right],$$

$$Q=\int_0^t v(y)\cdot h\,dy=\frac{1}{3}t^3\cdot\left(\frac{\rho g}{\eta}\right)\cdot h\cdot\sin\alpha$$

Tiefe der Strömung: $\boxed{t=\left(\dfrac{3Q\eta}{\rho g h\sin\alpha}\right)^{1/3}}$

IV. Modifizierte Bernoulli-Gleichung für viskose Strömungen

Für viskose Strömungen gilt der Energieerhaltungssatz nicht mehr. Solange man die Strömung als annähernd ideal betrachten kann, nimmt der Arbeitssatz (Bernoulli-Gleichung) die folgende Form an:

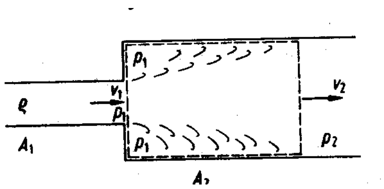
$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \Delta p_v$$

Δp_v heißt *Druckverlust*. Bezogen auf den Staudruck nennt man ihn *Druckverlustzahl*:

$$\varsigma = \frac{\Delta p_v}{\rho v_1^2 / 2}.$$

V. Carnotscher Stoßverlust

Die Verlustzahl kann man manchmal relativ einfach mit Hilfe des Impulssatzes abschätzen. Betrachten wir die Strömung einer Flüssigkeit in einem horizontalen Rohr, dessen Querschnittsfläche sich plötzlich von A_1 auf A_2 vergrößert. Zu bestimmen sind der Druckverlust und die Verlustzahl.



Lösung: Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit unmittelbar "um die Ecke" ruht (weiß man aus Erfahrung). Dann ist der Druck um die Ecke auch p_1 (Aus der Gleichgewichtsbedingung in vertikaler Richtung). Aus der Kontinuität folgt: $v_1 A_1 = v_2 A_2$. Der Impulssatz angewendet auf das markierte Kontrollvolumen lautet

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho A_2 v_2^2 - \rho A_1 v_1^2.$$

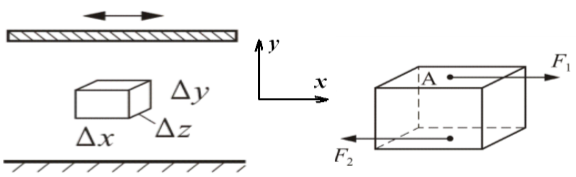
Daraus folgt

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - A_1 / A_2\right)^2.$$

Es folgt die Verlustzahl $\boxed{\varsigma = \left(1 - A_1 / A_2\right)^2}$.

VI. Dynamische Gleichung für eine ebene Strömung einer viskosen Flüssigkeit

Nehmen wir an, dass eine viskose Flüssigkeit an der Oberfläche zu einer periodischen Bewegung angeregt wird.



Falls keine turbulente Strömung entsteht, wird die Geschwindigkeit überall in der Flüssigkeit nur eine x-Komponente haben und diese wird nur von y abhängen: $v = (v_x, 0, 0)$, $v_x = v_x(y,t)$.

Wir betrachten die Bewegung eines infinitesimal kleinen Volumenelementes. Das 2. N.G. für das gezeigte Volumenelement lautet:

$m \cdot \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \left(F_1 - F_2\right)$, wobei $m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$,

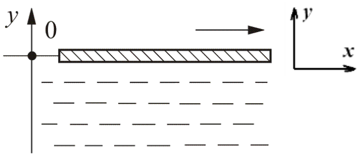
$F_1 = \tau\left(y + \Delta y\right) \cdot A = \tau\left(y + \Delta y\right) \Delta x \Delta z$,

$F_2 = -\tau\left(y\right) \cdot \Delta x \Delta z$.

$$F_1 - F_2 = \left(\tau\left(y + \Delta y\right) - \tau\left(y\right)\right) \Delta x \Delta z = \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

VII. Abklingtiefe einer periodischen Strömung



Eine auf der Oberfläche einer Flüssigkeit liegende Platte wird tangential mit der Geschwindigkeit $v_x\left(y = 0\right) = v_0 \cos \omega t$ bewegt. Zu bestimmen ist die Strömungsgeschwindigkeit $v_x\left(y, t\right)$.

Lösung:

Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Die partikuläre Lösung wird in der Form $\tilde{v}_x = \tilde{v} \exp\left(i\omega t + \lambda y\right)$ gesucht.

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt $i\omega\rho = \eta\lambda^2$. Daraus

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\omega\rho}{\eta}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\eta}}\left(1 + i\right) = \pm\kappa\left(1 + i\right).$$

$$\kappa = \sqrt{\omega\rho / 2\eta}.$$

„Allgemeine partikuläre Lösung“:

$$\tilde{v}_x = A e^{+\kappa(1+i)y} + B e^{-\kappa(1+i)y}.$$

Da $\tilde{v}_x \to 0$ für $y \to -\infty$, gilt $B = 0$:

$$\tilde{v}_x = A e^{\kappa(1+i)y + i\omega t}$$

$$v_x = \mathrm{Re}\left\{\tilde{v}_x\right\} = A \cdot e^{\kappa y} \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i\kappa y + i\omega t}\right\} = $$

$$= A e^{\kappa y} \cdot \cos\left(\kappa y + \omega t\right)$$

Bei $y = 0$ ist $v_x = A \cdot \cos \omega t \Rightarrow A = v_0 \Rightarrow$

$$\boxed{v_x = v_0 e^{\kappa y} \cdot \cos\left(\kappa y + \omega t\right)}$$

„Die Abklingtiefe“ $h = 1/\kappa = \sqrt{2\eta / \omega\rho}$.