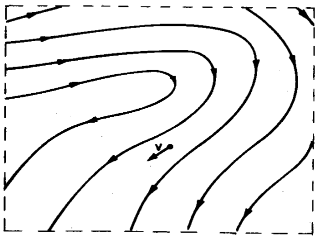
Kontinuumsmechanik / Prof. Popov / Vorlesung 9

Kontinuitätsgleichung, Bernoullische Gleichung

Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III", Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4"

I. Geschwindigkeitsfeld und Stromlinien in einer Flüssigkeit



II. Flüssigkeitsbewegung in einer Stromröhre

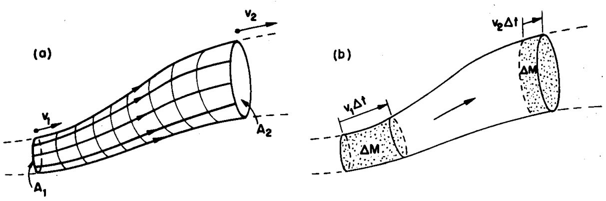
A. Kontinuitätsgleichung

Stationäre Strömung $\Rightarrow$ Bei A_1 fließt gleich viel Masse ein, wie bei A_2 ausströmt:

$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$. Somit

$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$ oder

$\boxed{\rho A v = const}$ (*Kontinuitätsgleichung*)



B. Die vom Flüssigkeitsdruck geleistete Arbeit:

<u>Annahmen: keine viskosen Kräfte, inkompressible Flüssigkeit.</u> Die Arbeit, die an der bei A_1 eintretenden Flüssigkeit geleistet wird, ist $p_1 A_1 v_1 \Delta t$. Die Arbeit an der bei A_2 austretenden Flüssigkeit $-p_2 A_2 v_2 \Delta t$. Die gesamte Arbeit ist gleich der Energiezunahme einer Masse ΔM, die sich von A_1 nach A_2 bewegt:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = E_2 - E_1$$

$$E = \Delta M \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi \right)$$

potentielle Energie pro Masseneinheit (Potential)

kinetische Energie pro Masseneinheit

Nach Division durch ΔM:

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\underbrace{\Delta M}_{\rho_1 A_1 v_1 \Delta t}} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\underbrace{\Delta M}_{\rho_2 A_2 v_2 \Delta t}} = \frac{1}{2} v_2^{\,2} + \phi_2 - \frac{1}{2} v_1^{\,2} - \phi_1$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^{\,2} + \phi_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^{\,2} + \phi_2 \quad \text{oder}$$

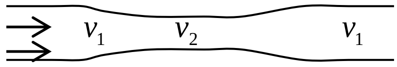
$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = const} \qquad (1)$$

(*Bernoullische Gleichung)*

Z.B. im Gravitationsfeld $(\phi = gz)$:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = const$$

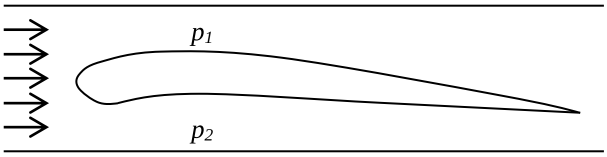
Beispiel 1: Sich verjüngendes Rohr



Aus der Bernoulli-Gleichung folgt $\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^{\,2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^{\,2}$.

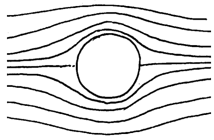
Aus der Kontinuitätsgleichung folgt $v_2 > v_1$. Deshalb ist $p_2 < p_1$. In Bereichen mit größerer Geschwindigkeit (in engeren Bereichen) ist der Druck kleiner!

Beispiel 1a: **Ein Flügel**

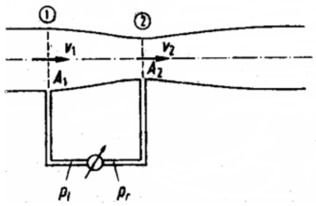


Beispiel 2: Die auf einen laminar umströmten (symmetrischen) Körper wirkende Kraft

Die Druckverteilung ist symmetrisch. Die Gesamtkraft ist *Null*.



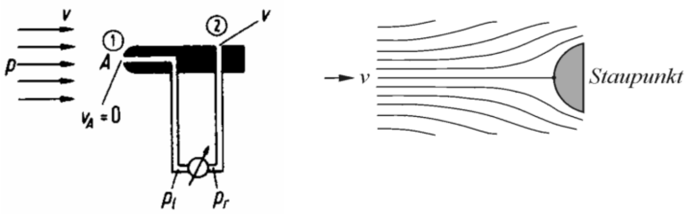
Beispiel 3: Messung des Volumenstroms



Der Volumenstrom Q ist konstant im Rohr, deshalb gilt $v_1 = Q / A_1$, $v_2 = Q / A_2$. Einsetzen in (1) liefert

$$Q = \sqrt{\frac{2 A_1^2 A_2^2 (p_1 - p_2)}{\rho \left(A_1^2 - A_2^2 \right)}}.$$

Beispiel 4: Messung der Strömungsgeschwindigkeit (Prandtl-Rohr)



Die Geschwindigkeit im Punkt A (Staupunkt) ist Null.

Die Bernoulli-Gleichung:

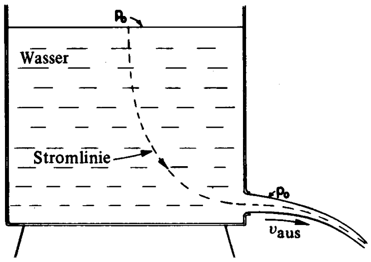
$$p_l - p_r = \tfrac{1}{2}\rho v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\left(p_l - p_r\right)/\rho}\,.$$

Beispiel 5: Ausfluss aus einem Gefäß mit einer Spiegelgröße A_s und einer kleinen Öffnung *A*

Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}0^2 + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_{aus}{}^2 + 0$$

$$\boxed{v_{aus} = \sqrt{2gh}}$$



(Ausflussformel von Toricelli)

Die Änderung der Spiegelhöhe ist $v_s = -\dfrac{dh}{dt}$.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$A_s v_s = A v_{aus} \quad \Rightarrow \quad v_s = A v_{aus} / A_s\,.$$

Aus beiden Gleichungen

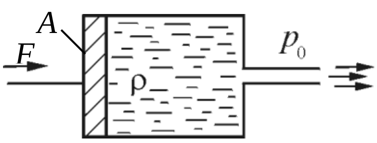
$$dh = -\frac{A}{A_s} v dt = -\frac{A}{A_s}\sqrt{2gh}\cdot dt$$

Trennen der Veränderlichen und Integration liefert

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{A_s}\sqrt{2g}\cdot\int_{t_1}^{t_2} dt \Rightarrow$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{A_s}{A}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right).$$

Beispiel 6: Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit



$$\frac{p}{\rho} + 0 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\frac{p - p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{2F}{A\rho}}$$

III. Kompressible Medien

Im allgemeinen Fall gilt für eine stationäre Strömung ($\partial\vec{v} / \partial t = \vec{0}$):

$$\left(\tfrac{1}{2}\nabla v^2 + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\phi\right) = 0\,.$$

(entlang einer Stromlinie!)

Für kompressible Medien mit $\rho = \rho(p)$

$$\frac{\nabla p}{\rho(p)} = \nabla\Gamma(p)\,, \qquad \Gamma(p) = \int\frac{dp}{\rho(p)}$$

Die Bernoulli-Gleichung nimmt die Form

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \Gamma(p) + \phi = const$$

an, oder

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \int\frac{dp}{\rho(p)} + \phi = const.$$

Für ein ideales Gas gilt $\rho = p / b$,

$$\Gamma(p) = b\ln p\,,$$

Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{v^2}{2} + \phi + b\ln p = const$$

<u>Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases (s. Beispiel 6)</u>

$$\rho = p/b\,, \quad F(p) = \int\frac{dp\cdot b}{p} = b\ln p$$

$$b\ln p = \frac{v^2}{2} + b\ln p_0 \;; \quad v = \sqrt{2b(\ln p/p_0)}$$

z.B. bei $p = 2p_0$, $b = 0{,}7c^2 \rightarrow v \simeq c$