Druck in einer ruhenden Flüssigkeit

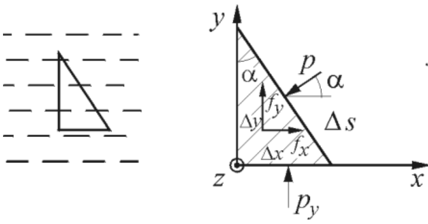
Lit.: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" 26.1. Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4", Kapitel 1.1, 1.2

I. Eigenschaften einer Flüssigkeit

Die Haupteigenschaft von Flüssigkeiten: sie können Schubspannungen nicht lange aushalten und beginnen zu fließen. $\Rightarrow$ *Im Gleichgewicht* dürfen in einer Flüssigkeit in keinem Schnitt Schubspannungen auftreten.

II. Druck in einer ruhenden Flüssigkeit

In jedem Punkt ist der Druck in allen Richtungen gleich. Beweis: Wir schneiden aus der Flüssigkeit einen kleinen Keil frei.



$\vec{f}$-Volumenkraft (pro Volumeneinheit)

Kräftegleichgewicht:

$$x: \quad p_x \Delta y \Delta z - p \Delta s \Delta z \cos\alpha + f_x \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

$$y: \quad p_y \Delta x \Delta z - p \Delta s \Delta z \sin\alpha + f_y \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

Da $\Delta x = \Delta s \sin\alpha$, $\quad \Delta y = \Delta s \cos\alpha$, folgt

$$p_x = p - f_x \Delta x / 2, \qquad p_y = p - f_y \Delta y / 2$$

Bei $\Delta x, \Delta y \to 0 \qquad p_x = p_y = p$.

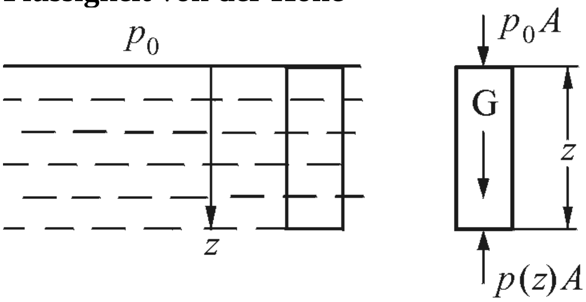
Ähnlich in drei Dimensionen:

$p_x = p_y = p_z = p$ (*Pascal*, 1623-1662).

Der Druck darf aber vom Ort abhängen: $p = p(x,y,z)$. Der Spannungstensor lautet

$$\{\sigma_{ij}\} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

III. Abhängigkeit des Druckes in einer Flüssigkeit von der Höhe

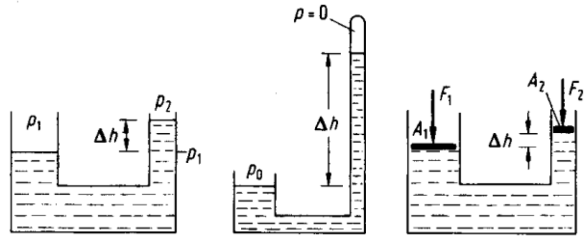


Kräftegleichgewicht für den gezeigten Ausschnitt: $p(z)A - \rho A z - p_0 A = 0$

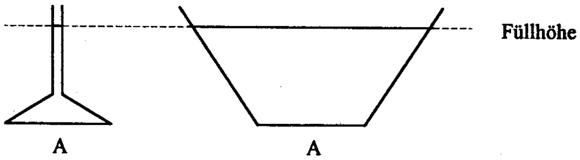
$$\boxed{p(z) = p_0 + \rho g z}$$

Der Druck hängt nur von der Höhe ab.

Anwendungen:



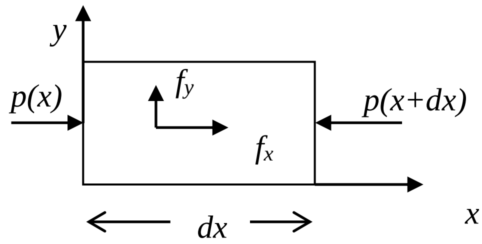
Manometer Barometer Hydraulische Presse



Das ***hydrostatische Paradoxon:*** Die Kraft F auf den Boden ist in beiden Fällen gleich.

IV. Druckverteilung bei einer beliebigen Volumenkraft:

Wir schneiden ein infinitesimal kleines Stück Flüssigkeit frei.



Kräftegleichgewicht in *x*-Richtung:

$$f_x dxdydz + \underbrace{p(x) - p(x+dx)}_{-\frac{\partial p}{\partial x}dx} dydz = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z. \qquad (1)$$

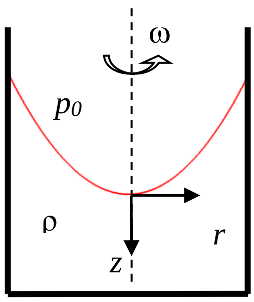
$$\vec{f} = \operatorname{grad} p = \vec{\nabla} p. \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

Bei konservativen Kräften $\vec{f} = -\operatorname{grad} U$ (hier ist U die Dichte der potentiellen Energie). $\Rightarrow$

$\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad} U \Rightarrow \quad p = -U + const$

Die Flächen gleichen Drucks sind Flächen konstanten Potentials.

Beispiel: Zu bestimmen sind die Druckverteilung in der Flüssigkeit und die Form der freien Oberfläche der Flüssigkeit in einem rotierenden Gefäß.



Lösung: Im rotierenden Bezugssystem wirkt in radialer Richtung die Zentrifugalkraft

$f_r = \rho r \omega^2$;
in vertikaler Richtung die Gravitationskraft
$f_z = \rho g$.
Nach (1) gilt

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f_r = \rho r \omega^2 \;\mathbf{;}\quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z = \rho g$$

$$\left.\begin{array}{l} p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \varphi(z) \\ p(r,z) = \rho g z + \psi(r) \end{array}\right\}$$

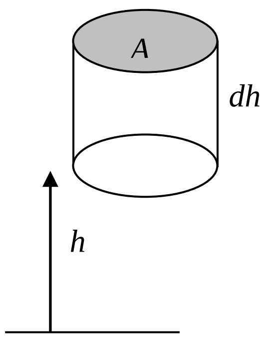
$$p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z + C$$

Aus $p=p_0$ bei $r=0$, $z=0$ folgt $C=p_0$.

$$p(r,z) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z \;.$$

An der freien Oberfläche gilt $p=p_0$.
$z = -\omega^2 r^2 / 2g$.

V. Druck in der Atmosphäre



Kräftegleichgewicht:
$Ap(h) = Ap(h+dh)$
$+\rho A \cdot dh \cdot g$
Daraus folgt

$$\frac{dp}{dh} = -g\rho \,. \qquad (2)$$

Bei einem Gas ist die Dichte eine Funktion des Druckes.

Für den Druck in einem *idealen Gas* gilt:

$$\boxed{p = nkT} \qquad (3)$$

n - Molekülkonzentration (Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit), k - Boltzmann-Konstante, T - absolute Temperatur.
Für die Dichte gilt offenbar:

$$\boxed{\rho = nm} \qquad (4)$$

m- Molekülmasse. Aus (3) und (4) folgt:
$p = \rho\left(kT/m\right) = b\rho$; $b = kT/m$

Man kann zeigen, dass die Konstante $b \approx 0.7c^2$, wobei c die Schallgeschwindigkeit ist, z.B. für Luft bei t=20°C gilt $c=330$ m/s und $b \approx 7.6 \cdot 10^4 \mathrm{m^2/s^2}$.

Gleichung (2) nimmt die folgende Form an:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{g}{b}p \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-\frac{g}{b}h} = p_0 e^{-\frac{h}{H}} \,.$$

$H = b/g$.

Für Luft $H = \dfrac{7.6 \cdot 10^4 \mathrm{m^2/s^2}}{9.8 \mathrm{m/s^2}} \approx 7.7\mathrm{km}$

VI. Hydrostatische Auftriebskraft (Archimedisches Prinzip)

Betrachten wir ein beliebiges Volumenelement innerhalb einer ruhenden Flüssigkeit. Da dieses Element im Gleichgewicht ist, muss die Kraft, die auf das betrachtete Element seitens seiner Umgebung wirkt, gleich seinem Gewicht sein. Diese Kraft würde sich nicht ändern, wenn wir die Grenzfläche des Elementes durch eine feste Oberfläche ersetzen würden. *Das bedeutet, dass auf einen in eine Flüssigkeit getauchten Körper seitens der Flüssigkeit eine Kraft wirkt, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist.* Diese Aussage ist als *Archimedisches Prinzip* bekannt.