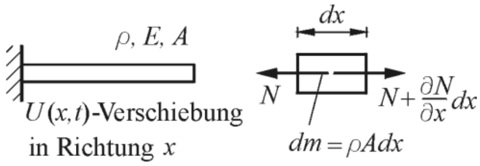
Longitudinalschwingungen von Stäben, Erzwungene Schwingungen

Literatur: 1. G.P. Ostermeyer. "Mechanik III" 21.1., 21.4.
2. Gross, Hauger, Schnell und Wriggers, „Technische Mechanik 4", Kapitel 4.2.1, 4.2.2

I. Longitudinalschwingungen von Stäben.

u(x,t) sei die Verschiebung des Punktes *x* des Stabes in Richtung *x*. Wir betrachten ein infinitesimales kleines Element der Länge *dx*.



Das 2. NG für dieses Element lautet

$$\underbrace{\boxed{\rho A dx}}_{dm}\cdot \ddot{u} = -N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x}dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x}dx . \quad (1)$$

Aus dem Elastizitätsgesetz folgt:

$$N = \sigma A = E\varepsilon A = EA\frac{\Delta l}{l} = EA\frac{du}{dx} = EAu' \quad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) ergibt die *Wellengleichung* $\rho\ddot{u} = Eu''$

oder $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ mit $c^2 = E/\rho$.

c ist die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit. Z.B. für Stahl:

$E = 210\,\text{GPa} = 2{,}1\cdot 10^{11}\,\text{N/m}^2$

$\rho = 7{,}8\cdot 10^3\,\text{kg/m}^3, \quad c = 5190\,\text{m/s}$.

Beispiel 1: Zu bestimmen ist die Stoßzeit einer 1 Meter langen stählernen Stange mit einer festen Wand.

Lösung: Die Punkte am anderen Ende des Stabes "erfahren" vom Zusammenstoß erst nach der Zeit $t_1 = l/c$. Die Punkte im Stoßpunkt "erfahren" von der Anwesenheit des freien Endes nach $t_2 = l/c$. Der Stoß dauert $t = t_1 + t_2 = 2l/c = 3{,}8\cdot 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}38\,\text{ms}$.

<u>Aufgabe zum Überlegen:</u> Was passiert beim Zusammenstoß (a) zweier gleicher Stangen, (b) zweier Stangen mit verschiedenen Längen?

II. Randbedingungen

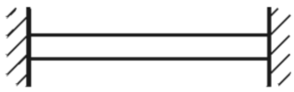
II.1. Die einfachsten Randbedingungen

- Bei einem fest gelagerten Rand $u = 0$ (keine Verschiebung)
- Bei einem freien Rand $u' = 0$ (keine Normalkraft)

Beispiel 2: Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen und Eigenformen für einen

(a) beiderseitig festgelagerten
(b) beiderseitig freien Stab

Lösung:

a) 

Bernoulli-Ansatz: $u(x,t) = T(t)V(x)$

Für $V(x)$ erhalten wir die Gleichung

$$V'' + \frac{\omega^2}{c^2}V = 0 \text{ oder } V'' + k^2 V = 0 .$$

Die Zahl $k = \omega/c$ heißt *Wellenzahl*.

Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung ist $\boxed{V(x) = A^*\cos kx + B\sin kx}$.

Aus den Randbedingungen folgt

$u(0,t) = 0 \rightarrow \quad A^* = 0$

$u(l,t) = 0 \rightarrow \quad B\sin kl = 0 \rightarrow k_n l = \pi n$

$\omega_n = k_n c = \pi n c/l$

b) 

Die allgemeine Lösung ist dieselbe.

Aus den Randbedingungen folgt jedoch

$u'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

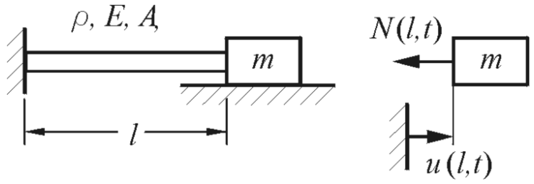
$u'(l) = 0 \Rightarrow \sin kl = 0$

$\boxed{kl = \pi n}$, $\boxed{\omega_n = \pi n c/l}$.

Die Eigenfrequenzen sind dieselben wie im Fall a), aber die Eigenformen sind verschieden!

II.2. Kompliziertere Randbedingungen

A. Stab mit einer am Ende angehefteten Masse.



Das 2.NG für die Masse

$m\ddot{u}(l,t) = -N(l,t) = -EAu'(l,t)$ ist die neue Randbedingung am rechten Rand!

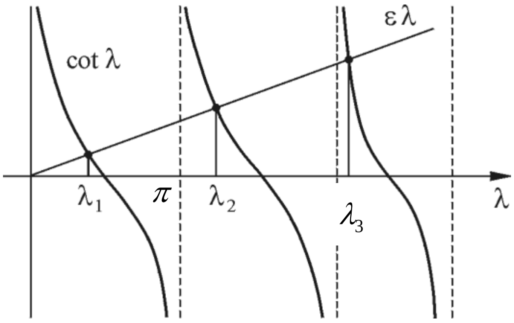
Aus der Randbedingung am linken Rand folgt $A^* = 0$. Aus der Randbedingung am rechten Rand: $-m\omega^2 u(l) = -EAu'(l)$ oder

$$m\omega^2 B\sin kl = EABk\cos kl$$

$$\cot kl = \frac{mc^2}{EA}\frac{kl}{l} = \frac{mc^2}{EAl}\lambda \text{ mit } \lambda = kl$$

$$\cot\lambda = \frac{mc^2}{EAl}\lambda = \frac{mE}{E\rho Al}\lambda = \varepsilon\lambda$$

$\varepsilon = m/M$, $\quad M$ - Stabmasse.

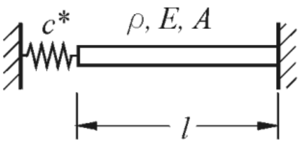


Es gibt unendlich viele Wurzeln $\lambda_n = k_n l$.

Daraus $k_n = \lambda_n / l$ und $\omega_n = k_n c = \lambda_n c / l$

<u>Grenzfall</u> $m = 0$; $\cos(kl) = 0$; $k_n l = \dfrac{2n-1}{2}\pi$

B. Gefedert gelagerter Stab



Bernoulli-Ansatz:

$u(x,t) = \left(A^* \cos kx + B \sin kx\right) \cdot T(t)$

Das Hooke‘sche Gesetz für die Feder:

$N(0,t) = c^* u(0,t) \Rightarrow EAu'(0,t) = c^* u(0,t)$

ist die Randbedingung am linken Rand.
Einsetzen von

$u'(0,t) = BkT(t)$

$u(0,t) = A^* T(t)$

in die Randbedingung am linken Rand ergibt

$c^* A^* - EAkB = 0$. (3)

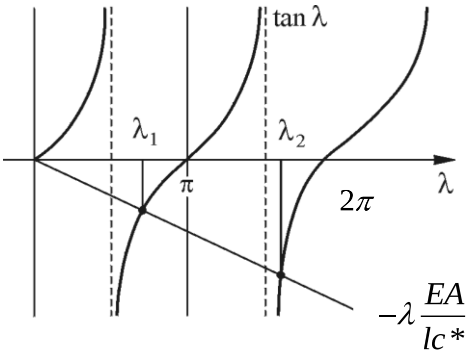
Am rechten Rand $u(l,t) = 0$:

$A^* \cos kl + B \sin kl = 0$ (4)

Eine nicht triviale Lösung existiert dann, wenn die Koeffizientendeterminante des Systems (3,4) gleich Null ist:

$c^* \sin kl + EAk \cos kl = 0$ oder

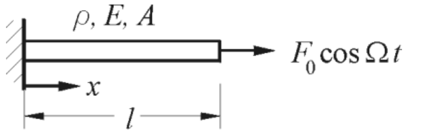
$$\tan \lambda + \lambda \frac{EA}{lc^*} = 0$$



Dann sind die λ_i zu bestimmen $k_i = \lambda_i / l$ und aus diesen die Eigenfrequenzen: $\omega_i = k_i c$.

<u>Aufgabe zum Überlegen:</u> was passiert in den Grenzfällen $c \to 0$ und $c \to \infty$?

III. Erzwungene Longitudinalschwingungen: Am rechten Ende eines links fest gelagerten Stabes wirkt eine periodische Kraft $F_0 \cos \Omega t$.



Zu bestimmen ist Bewegung des Stabes. *Lösung:* Die Randbedingungen lauten:

$u(0,t) = 0$ und

$N(l,t) = EAu'(l,t) = F_0 \cos \Omega t$.

Die Partikularlösung der Wellengleichung suchen wir in der Form

$u_p(x,t) = U_p(x) \cdot \cos \Omega t$.

Einsetzen in die Wellengleichung liefert

$U_p'' + \left(\Omega^2 / c^2\right) U_p = 0$.

Die allgemeine Lösung für die Ortsfunktion:

$U_p(x) = B_1 \cos\left((\Omega / c) x\right) + B_2 \sin\left((\Omega / c) x\right)$,

$u_p(x,t) = \left[B_1 \cos\left((\Omega / c) x\right) + B_2 \sin\left((\Omega / c) x\right)\right] \cdot \cos \Omega t$

Aus den Randbedingungen folgt

$U_p(0,t) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$

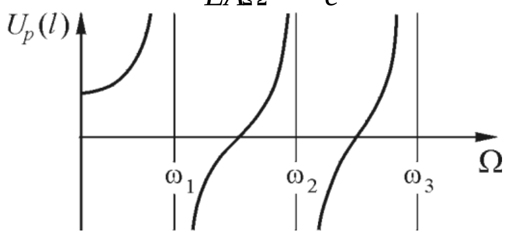
$EAu'_p(l,t) = F_0 \cos \Omega t$

$$EAB_2 \frac{\Omega}{c} \cdot \cos \frac{\Omega}{c} l = F_0 \Rightarrow B_2 = \frac{F_0}{EA \frac{\Omega}{c} \cos \frac{\Omega}{c} l} .$$

Die Partikularlösung ist also gleich

$$u_p(x,t) = U_p(x) \cos \Omega t = \frac{F_0 l}{EA} \frac{\sin \frac{\Omega}{c} x}{\frac{\Omega}{c} l \cos \frac{\Omega}{c} l} \cos \Omega t$$

Die Amplitude der Schwingung bei $x = l$ ist gleich $U_p(l) = \dfrac{F_0 c}{EA\Omega} \tan \dfrac{\Omega}{c} l$ (s. Bild unten).



Die Amplitude wird *unendlich* bei allen Frequenzen, für welche $\cos \Omega l / c = 0$. Das sind genau die Eigenfrequenzen eines einseitig fest gelagerten Stabes!

Entspricht die Erregerfrequenz einer der Eigenfrequenzen des Systems, so wächst die Schwingungsamplitude unbegrenzt (Resonanz).