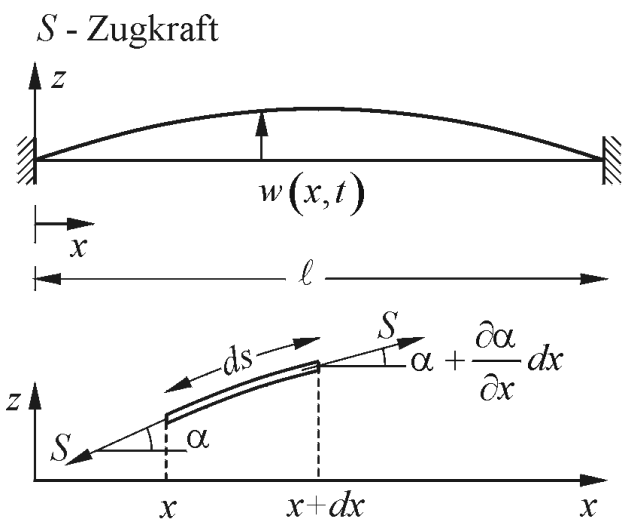


I. Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung für eine gespannte Saite

Gegeben sei ein vorgespannter Faden, der keine Biegesteifigkeit besitzt. Die Massenbelegung (Masse pro Längeneinheit) sei $\mu = \rho A$. Zu bestimmen ist die Bewegungsgleichung für die Saite.



Wir schneiden ein infinitesimales Saitenelement mit der Länge ds frei. Es gilt:

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx w'$$

$$\alpha + d\alpha \approx \sin(\alpha + d\alpha) \approx w' + dw' = w' + w'' dx$$

Die auf das Element wirkende Kraft ist

$$\begin{aligned} dF_z &= S \cdot \sin(\alpha + d\alpha) - S \sin(\alpha) = \\ &= S(\alpha + d\alpha - \alpha) = S d\alpha = S w'' dx \end{aligned}$$

Das 2. Newtonsche Gesetz für das Element:

$$dm \cdot \ddot{w} = dF_z \Rightarrow \mu dx \ddot{w} = S w'' dx :$$

$$\mu \ddot{w} = S w''$$

oder

Die Wellengleichung: $\ddot{w} = c^2 w''$

lineare, homogene, partielle DGL

(1)

$$c^2 = \frac{S}{\mu}$$

Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit

Zur Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung werden noch

die **Anfangsbedingungen**

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x)$$

und die **Randbedingungen**, z.B.

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0$$

benötigt.

II. d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung

Eine beliebige Funktion der Form

$$w = f_1(x - ct) = f_1(\xi), \quad \xi = x - ct$$

genügt der Wellengleichung. Beweis:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \ddot{w} \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} :$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = w'' \tag{3}$$

Mit (2) und (3) in (1) folgt:

$$c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \rightarrow \text{gelingen!}$$

Eine beliebige Funktion der Form

$$w = f_2(x + ct) = f_2(\zeta), \quad \zeta = x + ct$$

ist auch eine Lösung der Wellengleichung.

Allgemeine Lösung:

$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

$f_1(x - ct)$ beschreibt eine Welle,

die sich mit konstanter Geschwindigkeit c ohne Änderung ihres Profils in positive x -Richtung fortpflanzt.

Beweis, dass dies eine allgemeine Lösung ist:

$$\xi = x - ct; \quad \zeta = x + ct.$$

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \zeta); \quad ct = \frac{1}{2}(\zeta - \xi).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \cdot c$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)$$

Die Wellengleichung nimmt die Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} = 0 \text{ an.}$$

Nach der ersten Integration: $\frac{\partial w}{\partial \zeta} = g(\zeta)$.

Nach der zweiten Integration:

$$w = f_1(\xi) + f_2(\zeta) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Bestimmung der Funktionen f_1 und f_2 aus Anfangsbedingungen:

$$f_1(x) + f_2(x) = w_0(x)$$

$$-cf_1'(x) + cf_2'(x) = v_0(x) \Rightarrow$$

$$-f_1(x) + f_1(x_0) + f_2(x) - f_2(x_0) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x}$$

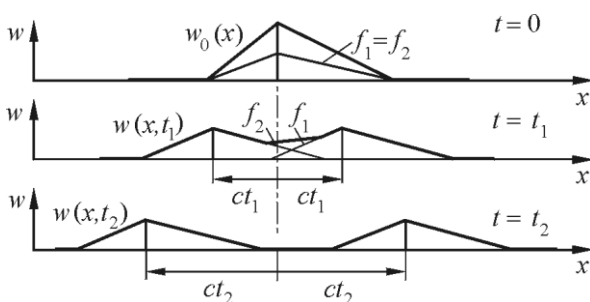
$$2f_{1,2}(x) = w_0(x) \mp \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(\bar{x}) d\bar{x} \pm f_1(x_0) \mp f_2(x_0)$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \left[w_0(x - ct) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x-ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x} \right] + \frac{1}{2} \left[w_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x+ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[w_0(x - ct) + w_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\bar{x}) d\bar{x} \right]$$

Beispiel: $v_0(x) = 0$

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [w_0(x - ct) + w_0(x + ct)]$$



Das ist nur eine richtige Lösung solange die Wellen auf keine Ränder treffen.

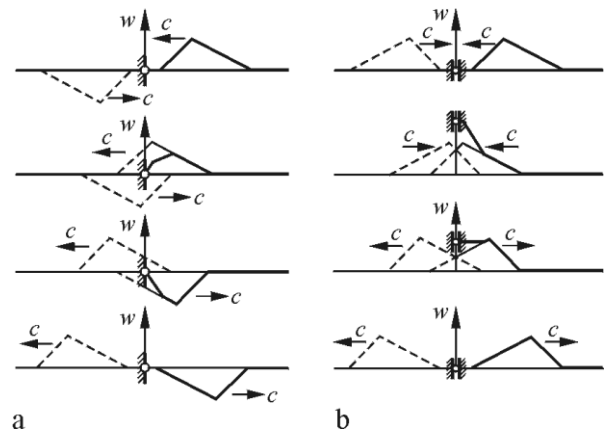
Berücksichtigung der Randbedingungen,

Beispiel 1: Fester Rand $w(0) = 0$

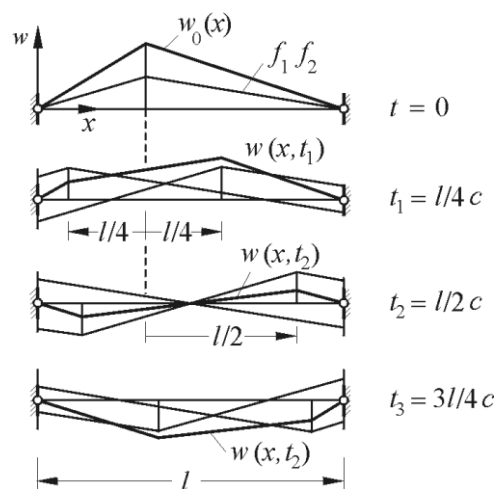
Die Aufgabe besteht in der Bestimmung einer solchen Funktion, die bei $x \in (0, \infty)$ (a) der Wellengleichung, (b) der Anfangsbedingung und (c) der Randbedingung genügt. Zu diesem Zweck betrachten wir *zunächst eine unendliche* Saite mit zwei symmetrischen Wellen mit *verschiedenem* Vorzeichen, die aufeinander laufen. Diese Welle genügt *auf dem Intervall* $x \in (0, \infty)$ den Bedingungen (a), (b) und (c) und ist somit die gesuchte Lösung (Bild (a) unten).

Beispiel 2: Freier Rand $w'(0) = 0$

Wir betrachten wieder *zunächst eine unendliche* Saite mit zwei symmetrischen Wellen mit *gleichen* Vorzeichen, die aufeinander laufen. Diese Welle genügt *auf dem Intervall* $x \in (0, \infty)$ den Bedingungen (a), (b) und (c) und ist somit die gesuchte Lösung (Bild (b) unten).



Beispiel 3: Fester Rand beiderseitig



Die Saite schwingt mit einer Schwingungsdauer $T = \frac{2l}{c}$.