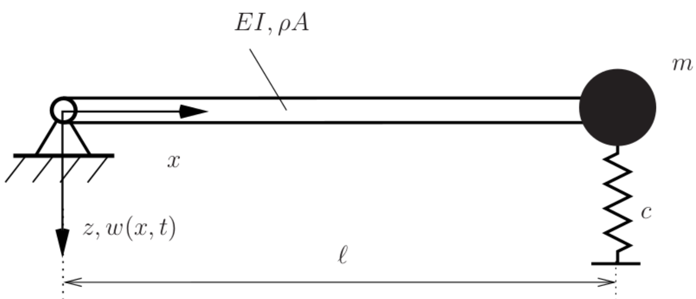
Kontinuumsmechanik – Probetest

1 Freie Transversalschwingungen (1 + 6 + 4 + 6 = 17 Punkte)

Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Dichte ρ, Querschnittsfläche A, Länge l) wird am linken Ende durch ein Festlager gelagert. Am rechten Ende des Balkens sind eine Einzelmasse m und eine Feder (Federsteifigkeit c) befestigt. Die Einzelmasse wird als Punktmasse aufgefasst. Der Balken führt freie Transversalschwingungen aus.



Geben Sie alle Ergebnisse in gegebenen Größen an!

Gegebene Größen: EI, A, ρ, l, m, c

(a) Geben Sie die Differentialgleichung des skizzierten Systems an.

(b) Überführen Sie die partielle Differentialgleichung mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und geben Sie deren allgemeine Lösungen an.
Verwenden Sie dabei die Abkürzung $\lambda^4 = \dfrac{\rho A \omega^2}{EI}$.

(c) Formulieren Sie die geometrischen und dynamischen Randbedingungen für das dargestellte System.

(d) Ermitteln Sie die Frequenzgleichung. Die Frequenzgleichung muss nicht gelöst werden!

a) Bewegungs-DGL

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho A}\,\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}$$

b) Produktansatz (Bernoulli)

$$w(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Einsetzen: $$X(x)\,\ddot{T}(t) = -\frac{EI}{\rho A}\,X^{IV}(x)\,T(t)$$

Separieren

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{EI}{\rho A}\,\frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = \text{konst.} = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{X^{IV}(x) - \underbrace{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}_{\lambda^4} X(x) = 0}$$

Allg. Lösung

$$\boxed{\begin{aligned} T(t) &= a \cos\omega t + b \sin\omega t \\ X(x) &= A \cosh\lambda x + B \sinh\lambda x + C \cos\lambda x + D \sin\lambda x \end{aligned}}$$

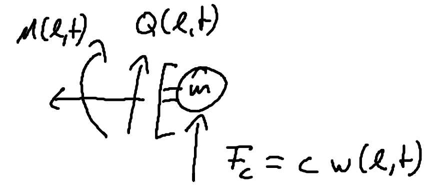
c) Randbedingungen

$w(0,t) = 0 \quad (1)$

$M(0,t) = 0 \Rightarrow w''(0,t) = 0 \quad (2)$

$M(l,t) = 0 \Rightarrow w''(l,t) = 0 \quad (3)$

Freischnitt:



2. N.G.

$m\ddot{w}(l,t) = -Q(l,t) - c\,w(l,t) \quad (4)$

$= EI\,w'''(l,t) - c\,w(l,t)$

d) Frequenzglg.

$X'(x) = \lambda(A \sinh\lambda x + B\cosh\lambda x - C\sin\lambda x + D\cos\lambda x)$

$X''(x) = \lambda^2(A\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x - C\cos\lambda x - D\sin\lambda x)$

$X'''(x) = \lambda^3(A\sinh\lambda x + B\cosh\lambda x + C\sin\lambda x - D\cos\lambda x)$

RB(1) $\Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0$

RB(2) $\Rightarrow X''(0) = 0 \Rightarrow A - C = 0$ $\Big\}\ A = C = 0$

RB(3) $\Rightarrow X''(l) = 0 \Rightarrow B\sinh\lambda l - D\sin\lambda l = 0 \quad (5)$

RB(4) $\Rightarrow m X(l)\underbrace{\ddot{T}(t)}_{-\omega^2 T(t)} = EI X'''(l)T(t) - c X(l) T(t)$

$\Rightarrow \quad 0 = EI X'''(l) - m X(l)(-\omega^2) - c X(l)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = EI\lambda^3(B\cosh\lambda l - D\cos\lambda l) + (m\omega^2 - c)(B\sinh\lambda l + D\sin\lambda l) \quad (6)$

(5) u. (6) in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} EI\lambda^3\cosh\lambda l + (m\omega^2 - c)\sinh\lambda l & -EI\lambda^3\cos\lambda l + (m\omega^2 - c)\sin\lambda l \\ \sinh\lambda l & -\sin\lambda l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nichttriviale Lsgn. ex., wenn die Determinante zu null wird:

$$-(EI\lambda^3 \cosh\lambda l + (m\omega^2 - c)\sinh\lambda l)\sin\lambda l - \sinh\lambda l(-EI\lambda^3\cos\lambda l + (m\omega^2-c)\sin\lambda l) = 0$$

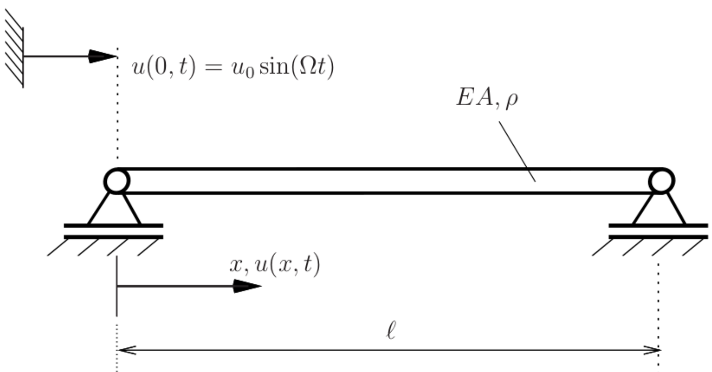
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 EI(-\cosh\lambda l \sin\lambda l + \sinh\lambda l\cos\lambda l) + 2(m\omega^2-c)\sinh\lambda l \sin\lambda l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 EI(\tanh\lambda l - \tan\lambda l) + 2(m\omega^2-c)\tanh\lambda l\tan\lambda l = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\tan\lambda l} - \frac{1}{\tanh\lambda l} = \frac{2(m\omega^2-c)}{\lambda^3 EI}}$$

2 Erzwungene Longitudinalschwingungen (1 + 2 + 7 + 3 = 13 Punkte)

Der skizzierte Stab (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Dichte ρ, Länge l) wird durch eine periodische Auslenkung $u(0,t) = u_0 \sin(\Omega t)$ des linken Lagers in Längsschwingungen versetzt.



Geben Sie alle Ergebnisse in gegebenen Größen an!

Gegebene Größen: E, A, ρ, l, u_0, Ω

(a) Geben Sie die Differentialgleichung des skizzierten Systems an.

(b) Formulieren Sie die Randbedingungen.

(c) Bestimmen Sie die Lösung $u_p(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.

(d) Ermitteln Sie die Kreisfrequenzen Ω_k, bei denen Resonanz auftritt.

a) Bewegungs-DGL

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

b)

$$u_p(0,t) = u_0 \sin(\Omega t) \qquad (1)$$

$$N(l,t) = 0 \Rightarrow u'(l,t) = 0 \quad (2)$$

$$\boxed{N(x,t) = EA\, u'(x,t)}$$

c) Lösung im eingeschw. Zustand

Gleichtaktansatz: $u_p(x,t) = X(x) \sin \Omega t$

in DGL: $\quad -\Omega^2 X(x) \sin \Omega t = c^2 X''(x) \sin \Omega t$

$$\Rightarrow \quad X'' + \frac{\Omega^2}{c^2} X = 0$$

allg. Lösung: $\quad X(x) = A \cos \frac{\Omega}{c} x + B \sin \frac{\Omega}{c} x$

RB (1) $\Rightarrow \quad X(0) \sin \Omega t = u_0 \sin \Omega t \quad \Rightarrow \quad X(0) = u_0 \quad \Rightarrow \quad A = u_0$

RB (2) $\Rightarrow \quad X'(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad -A \sin \frac{\Omega}{c} \ell + B \cos \frac{\Omega}{c} \ell = 0$

$$\Rightarrow \quad B = u_0 \tan \frac{\Omega}{c} \ell$$

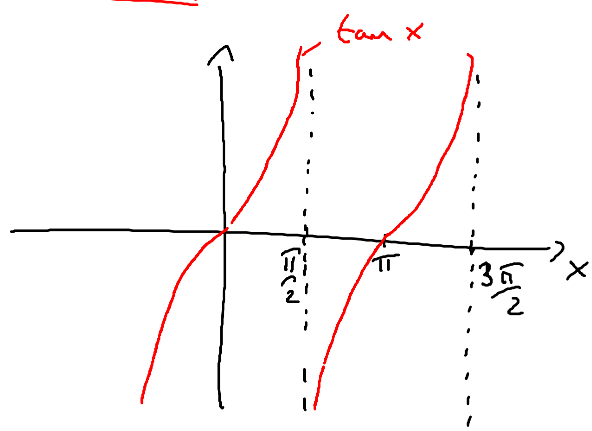
$$\boxed{u_p(x,t) = u_0 \left(\cos \frac{\Omega}{c} x + \tan \frac{\Omega}{c} \ell \sin \frac{\Omega}{c} x \right) \sin \Omega t}$$

d) Resonanz tritt auf, falls $u_p(x,t) \to \infty$, d.h.

$$\tan \frac{\Omega}{c} \ell \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Omega_k \ell}{c} = \frac{\pi}{2}(2k-1) \quad , \; k = 1,2,3 \ldots$$

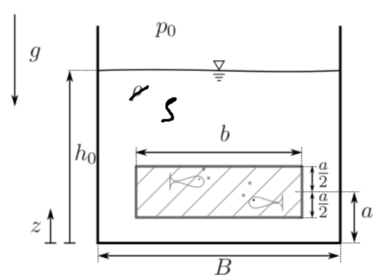
$$\Rightarrow \boxed{\Omega_k = \frac{c\pi}{2\ell}(2k-1)}$$



3

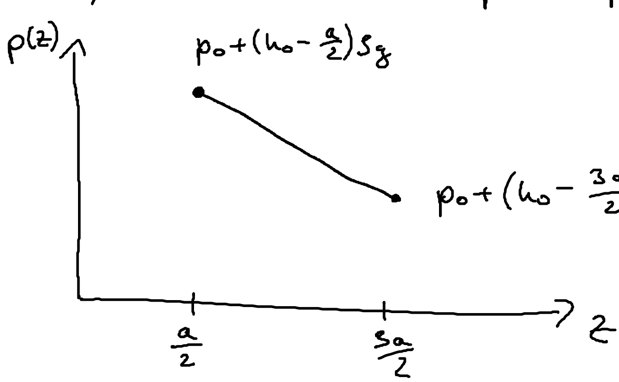
Abgebildet ist ein Wasserbecken (Breite B, Gesamtlänge L) mit einem Anfangswasserstand h_0. Im unteren Bereich ist ein großes Fenster (Breite b, Höhe a) zu Beobachtungszwecken eingelassen. Das Wasser sei inkompressibel (Dichte ρ) und reibungsfrei. Beachten Sie die Zählrichtung der Koordinate z.

(a) Skizzieren Sie den Verlauf des Druckes $p(z)$, der im Inneren des Beckens auf das Fenster wirkt für $z \in (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$ und geben Sie $p(\frac{a}{2})$ und $p(\frac{3a}{2})$ an.

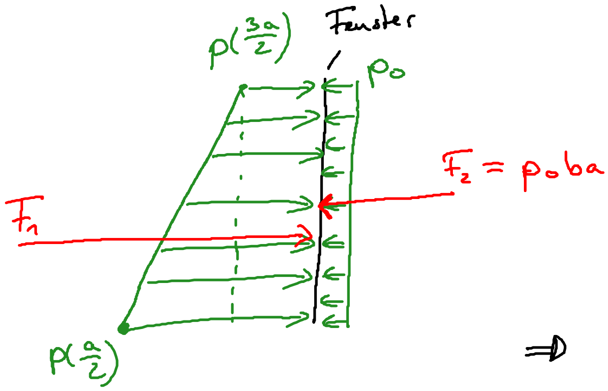


Geg.: p_0, g, h_0, B, L, b, a, s, ρ, F_K

a) Hydrostatischer Druck: $\quad p(z) = p_0 + (h_0 - z) S g$



(b) Die Verbindung zwischen Fenster und Becken kann eine maximale Kraft F_K aushalten. Bei welcher Füllhöhe h_{max} wird diese Kraft in der Verbindung erreicht?



$$F_1 = p\left(\frac{3a}{2}\right) ba + \frac{p(\frac{a}{2}) - p(\frac{3a}{2})}{2} ba$$

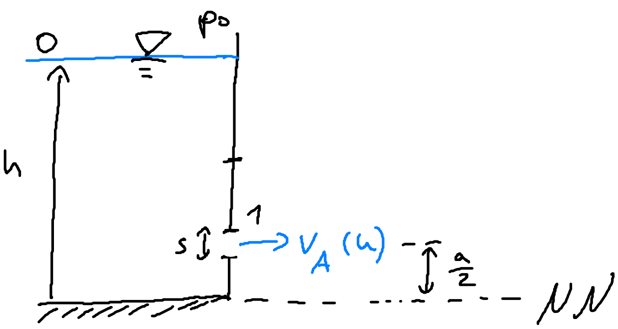
$$= p_0 ba + \rho g ba \left(h_0 - \frac{3a}{2}\right) + \frac{1}{2}\rho g b a^2$$

$$F_{res} = F_1 - F_2 = \rho g ba (h_0 - a)$$

$$\Rightarrow \quad F_K = \rho g b a (h_{max} - a)$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{F_K}{\rho g b a} + a}$$

(c) Nehmen Sie an, das Fenster sei an der Unterkante undicht, so dass dort ein Spalt (Spaltmitte bei $z = \frac{a}{2}$) der Breite b und der Höhe s entstehe. Bestimmen Sie mit Hilfe der BERNOULLIschen Gleichung für einen Stromfaden die Austrittsgeschwindigkeit $v_A(h)$ unter der Annahme, dass der Wasserspiegel nicht absinkt.



Bernoulli: $0 \to 1$:

$$\frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g\frac{a}{2}$$

$$v_A^2 = 2g\left(h - \frac{a}{2}\right)$$

$$v_A = \sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)} \qquad \text{(Torricelli)}$$

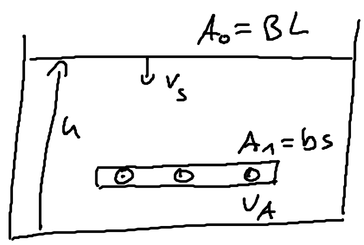
(d) Verwerfen Sie die Annahme des nicht-sinkenden Wasserspiegels und bestimmen Sie nun mit Hilfe des in (c) bestimmten $v_A(h)$ und der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels $v_S(h)$ und die Zeit T, die vergeht bis der Wasserspiegel die Oberkante des Fensters bei $z = \frac{3a}{2}$ erreicht hat.

Konti:

$$A_0 v_s = A_1 v_A$$

$$BL v_s = bs v_A$$

$$v_s = \frac{bs}{BL}\sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)}$$



$$v_s = -\frac{dh}{dt}$$

$$\text{T.d.V.:} \quad \int_{h_0}^{h} -\frac{d\tilde{h}}{\sqrt{(\tilde{h} - \frac{a}{2})}} = \int_0^t \frac{bs\sqrt{2g}}{BL} d\tilde{t}$$

$$-\left[2\sqrt{\tilde{h} - \frac{a}{2}}\right]_{h_0}^{h} = \frac{bs\sqrt{2g}}{BL} t$$

$$-2\left(\sqrt{h-\frac{a}{2}} - \sqrt{h_0-\frac{a}{2}}\right) = \frac{bs\sqrt{2g}}{BL}\, t$$

$$t = \frac{2BL}{bs\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0-\frac{a}{2}} - \sqrt{h-\frac{a}{2}}\right) \quad (*) \Rightarrow \quad T = \frac{2BL}{bs\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0-\frac{a}{2}} - \sqrt{a}\right)$$

(e) Fertigen Sie eine qualitative Skizze für den Verlauf der Füllhöhe $h(t)$ mit $t \in (0, T)$ an. Geben Sie Anfangs- und Endwert an.

$$\sqrt{h-\frac{a}{2}} = \sqrt{h_0-\frac{a}{2}} - \frac{bs\sqrt{2g}}{2BL}\, t$$

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0-\frac{a}{2}} - \frac{bs\sqrt{2g}}{2BL}\, t\right)^2 + \frac{a}{2}$$