Organisatorisches

- Übung am 7.02.2020: Vorrechnen einer Probeklausur
- Tutorienwoche 10.02. - 14.02. (KW7): Klausurpräparatstunden für EM/KM statt KM-Tutorien
- schriftlicher Test am 18.02.2020: Voraussichtlich um 10:15 Uhr, Infos folgen
Thema: Viskose /reibungsbefähigte Flüssigkeiten

- Tangentialkräfte zwischen Fluidteilen (Reibungskräfte)
- Größe der Tangentialkräfte hängt von der Änderung der Geschwindigkeit normal zur Bewegungsrichtung ab. D.h. $\frac{dv_x}{d_\tau}$
- viskose Flüssigkeiten haften an Wänden
- "Störmungsenergie" wird in andere Energieformen umgewandelt (z.B. Wärme) = D. Bernoulli: $\frac{d}{d_\tau}$ in bisheriger Form nicht anwendbar

Einfaches Modell: Newtonsche Flüssigkeit:

$\tau_x = \eta \frac{dv_x}{d_\tau}$
$\tau = \text{dyn. Viskosität} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right]$
79. Längs einer unter $\alpha = 60^\circ$ gegen die Waagerechte geneigten Platte der Breite $b = 0.5\text{m}$ fließt eine konstante Ölmenge $Q = 31/\text{s}$ als dünner Film der Stärke $\delta$.

Annahme: Es stellt sich ein in $x$-Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckprofil ein.

Man berechne

(a) die Geschwindigkeit im Film und
(b) die Filmdicke $\delta$ ($\nu = 0.436 \cdot 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$).

$\Rightarrow$ Es wirkt keine Beschleunigung auf die Fluidteilchen, Fluidteilchen ist in Schwerkraft

\[ \delta = \Delta x \Delta y \rho g \]

\[
\begin{align*}
\text{in } x \text{- Richtung:} \quad \Sigma F_x &= 0 = p_x y b - p_x y b + \int_{y}^{y+dy} S_{yx} (y+dy) b \Delta x - \int_{y}^{y} S_{yx} (y) b \Delta x + \delta \sin \alpha \\
\int_{y}^{y+dy} S_{yx} - S_{yx} (y) \frac{dy}{dy} &= -\delta g \sin \alpha \\
\frac{d S_{yx}}{dy} &= -\delta g \sin \alpha
\end{align*}
\]

Annahme: Newtonsches Fluid $\dot{S}_{yx} = \eta \frac{d v_x}{dy}$

\[
\begin{align*}
\text{Integration:} \quad \Rightarrow \quad \frac{d v_x}{dy} &= -\frac{\delta g \sin \alpha}{\eta} \quad \frac{d v_x}{dy} = -\frac{\delta g \sin \alpha}{\eta} y + C_1, \quad v_x (y) = -\frac{\delta g \sin \alpha}{2 \eta} y^2 + C_1 y + C_2
\end{align*}
\]

Randbedingungen:

Haftbedingung $v_x (y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

keine Schubspannungen an der Oberfläche: $S_{yx} (y=\delta) = 0 \Rightarrow \frac{d v_x}{dy} (y=\delta) = 0$
b) Filmhöhe bei gegebener Durchflussmenge $Q$ (Volumenstrom)

\[ Q = \int v(x) \, dx = \int_{0}^{b} v(x) \, dx = \frac{b \delta}{z} \int_{0}^{\delta} \left( \delta - \frac{\delta}{2} \right) \, dy = \frac{b \delta}{z} \int_{0}^{\delta} \left( \delta - \frac{\delta}{2} \right) \, dy \]

\[ Q = \frac{b \delta^3}{3z} \quad \Rightarrow \quad \delta = 3 \sqrt[3]{\frac{3Q}{b \delta \sin \alpha}} \]

gesucht kin. Viskosität $\nu = \frac{\rho}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = 3 \sqrt[3]{\frac{3Q\nu}{b \delta \sin \alpha}}$

78. Betrachtet wird ein Rohr (Radius $R$, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen $\alpha$), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität $\eta$, Dichte $\rho$) fließt. Der Volumenstrom sei $Q$. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden.

Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofi $v(r)$ bei stationärer Strömung in Abhängigkeit von dem Volumenstrom $Q$.

Annahme: Nehmen Sie an, dass der Druck $p$ nur von $z$ abhängt.
Geg.: $R$, $Q$, $\eta$, $\alpha$, $g$

Freistrahlen eines zylindrischen, konzentrischen Flüssigkeitsvolumen

\[ \zeta = \eta r \Delta z \delta g \]
\( \sigma_{eq} = - \left( p(z) - p(z + \delta z) \right) \frac{R^2}{2} \delta z + \frac{1}{2} \delta z + S \delta \sin \alpha \)

\( \sigma = - R \left( \frac{p(z + \delta z) - p(z)}{\delta z} \right) \frac{dV}{dz} + \frac{1}{2} S \delta \sin \alpha \)

\( S_{eq} = - \delta \sigma R \sin \alpha = \frac{\delta z}{2} \frac{dV}{dz} \) \hspace{1cm} (1)

Materialgesetz: Newtonscher Schubspannungsaspekt

\( S_{eq} = R \frac{dV}{dz} \) \hspace{1cm} (2)

\( \Rightarrow \) Die Schubspannung ist negativ, da \( \frac{dV}{dz} < 0 \).

\( (2) \) in (1):

\( \frac{dV}{dz} = \frac{R}{2} \frac{d\sigma}{dz} - \frac{S \delta \sin \alpha}{2} \)

Es soll angenommen werden, dass der Druck in Querschnitt konstant sein \( \Rightarrow p = p(z) \)

\( \Rightarrow \) Für neue Rohre gerechtfertigt

Integration

\( \int_{r_1}^{r_2} \frac{dV}{dz} = \frac{R}{2} \frac{d\sigma}{dz} - \frac{S \delta \sin \alpha}{2} \)

Hauptbedingung: \( v(R) = 0 \Rightarrow C = \left( S \delta \sin \alpha - \frac{d\sigma}{dz} \right) \frac{R^2}{4} \)

\( \Rightarrow \) \( v(r) = \frac{A}{r_2} \left( S \delta \sin \alpha - \frac{d\sigma}{dz} \right) \left( R^2 - r^2 \right) \) \hspace{1cm} (3)

Bestimmung von \( v(r) \) in Abhängigkeit des Volumenstroms \( Q \)

\( Q = \int v(r) \, dz = 2 \pi \int_{0}^{R} v(r) \, r \, dr = \frac{\pi}{2} \left( S \delta \sin \alpha - \frac{d\sigma}{dz} \right) \int_{0}^{R} R^2 - r^2 \, dr \)

\( = \frac{\pi}{8} \left( S \delta \sin \alpha - \frac{d\sigma}{dz} \right) \left( \frac{R^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \)

\( \Rightarrow Q = \frac{\pi}{8} \left( S \delta \sin \alpha - \frac{d\sigma}{dz} \right) \left( \frac{R^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \)
\[ s_y \sin \alpha - \frac{dF}{dt} = \frac{8Q \nu}{\pi R^4} \]  

\[ (4) \]  

\[ (4) \sin(3) \Rightarrow \nu(r) = \frac{\frac{2Q}{4\pi R^2}}{\nu_0} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \]