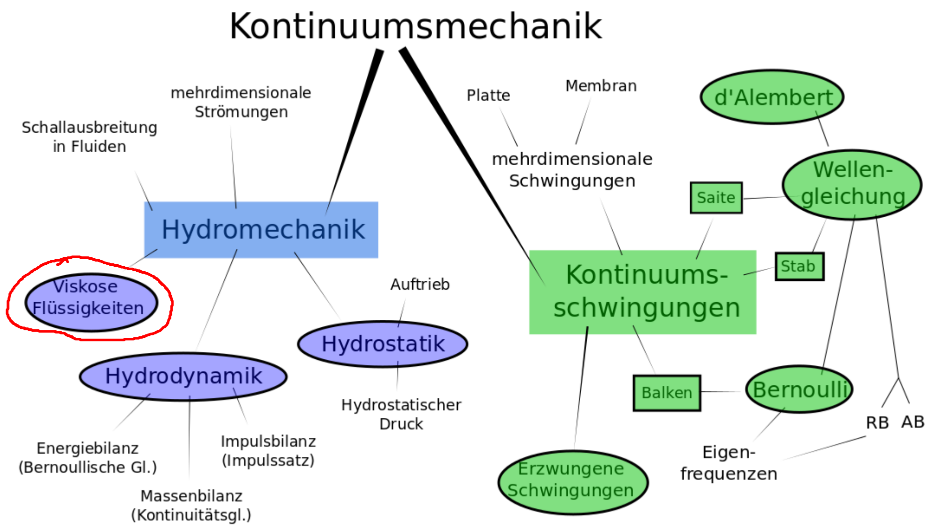
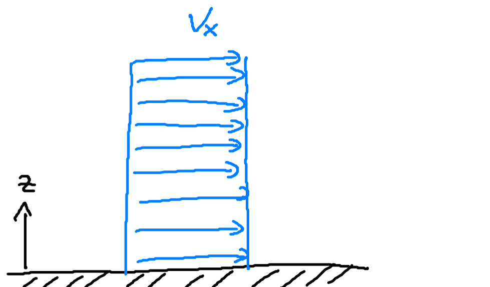
7. Plenarübung – Kontinuumsmechanik

Organisatorisches

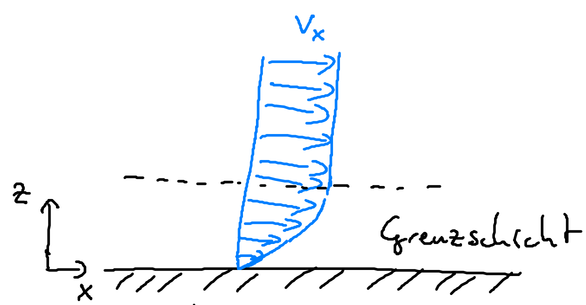
- Übung am 7.02.2020: Vorrechnen einer Probeklausur
- Tutorienwoche 10.02. – 14.02. (KW7): Klausursprechstunden für EM/KM statt KM-Tutorien
- schriftlicher Test am 18.02.2020: Voraussichtlich im H0105 um 12:15 → genaue Infos folgen onlin



Thema: Viskose / reibungsbehaftete Flüssigkeiten



reibungsfreie Strömung (bisher)



viskosen Strömung

- Tangentialkräfte zwischen Fluidteilchen (Reibungskräfte)
- Größe der Tangentialkräfte hängt von der Änderung der Geschwindigkeit <u>normal</u> zur Bewegungsrichtung ab. D.h. $\frac{dv_x}{dz}$
- viskose Flüssigkeiten haften an Wänden
- "Strömungsenergie" wird in andere Energieformen umgewandelt (z.B. Wärme) ⇒ Bernoulli-Glg. in bisheriger Form nicht anwendbar

Einfachste Modell:

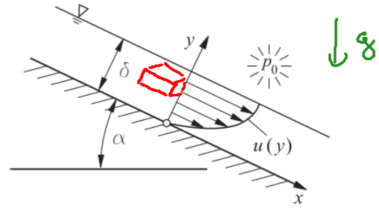
Newtonsche Flüssigkeit

$$\tau_{zx} = \eta \frac{dv_x}{dz}$$

τ – Schubspannung

η – dyn. Viskosität $\left[\frac{kg}{m\,s}\right]$

79. Längs einer unter $\alpha = 60^o$ gegen die Waagerechte geneigten Platte der Breite $b = 0{,}5\text{m}$ fließt eine konstante Ölmenge $Q = 3\,\text{l/s}$ als dünner Film der Stärke δ.



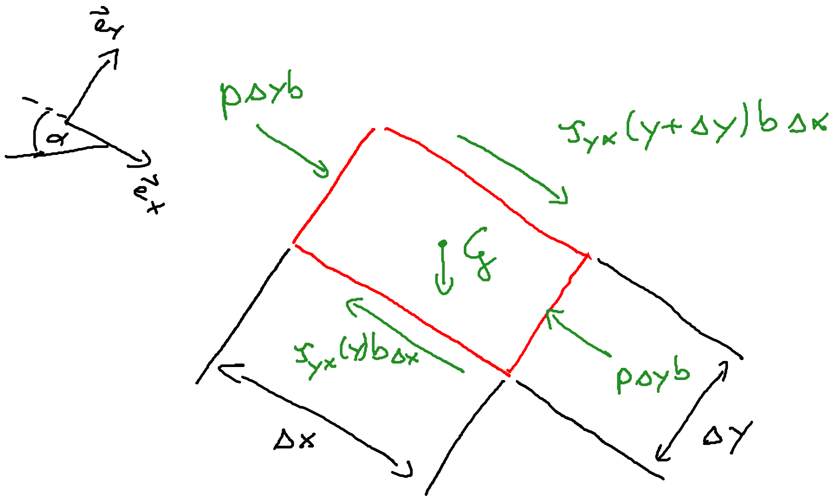
Annahme: Es stellt sich ein in x-Richtung konstantes Geschwindigkeits- und Druckprofil ein.

Man berechne

(a) die Geschwindigkeit im Film und

(b) die Filmdicke δ ($\nu = 0{,}436 \cdot 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$).

$\Rightarrow$ Es wirkt keine Beschleunigung auf die Fluidteilchen, Fluidteilchen ist im Gleichgewicht



$g = \Delta x \Delta y b \rho g$

GGW in x-Richtung: $\Sigma F_x = 0 = \cancel{p\Delta y b} - \cancel{p\Delta y b} + \tau_{yx}(y+\Delta y) b \Delta x - \tau_{yx}(y) b \Delta x + g \sin\alpha$

$$\underbrace{\frac{\tau_{yx}(y+\Delta y) - \tau_{yx}(y)}{\Delta y}}_{\frac{d\tau_{yx}}{dy}} = -\rho g \sin\alpha$$

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\rho g \sin\alpha$$

Annahme: Newtonsches Fluid $\tau_{yx} = \eta \dfrac{dv_x}{dy}$

Integration: $\Rightarrow \dfrac{d^2 v_x}{dy^2} = -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{\eta}$, $\dfrac{dv_x}{dy} = -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{\eta} y + C_1$, $v_x(y) = -\dfrac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} y^2 + C_1 y + C$

Randbedingungen:

Haftbedingung $v_x(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

keine Schubspannungen an der Oberfläche: $\tau_{yx}(y=\delta) = 0 \Rightarrow \dfrac{dv_x}{dy}(y=\delta) = 0$

$$\Rightarrow + \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}\,\delta = C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}\left(\delta y - \frac{y^2}{2}\right)}$$

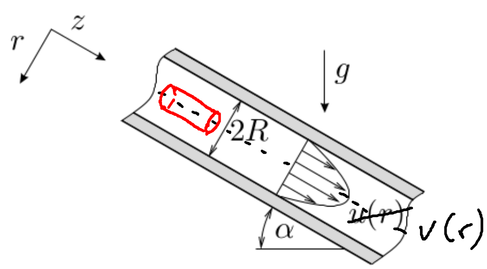
b) Filmdicke bei geg. Durchflussmenge Q (Volumenstrom)

$$Q = \int v_x(y)\,dA = b\int_0^\delta v_x(y)\,dy = \frac{b\rho g \sin\alpha}{\eta}\underbrace{\int_0^\delta \delta y - \frac{y^2}{2}\,dy}_{\left[\delta\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^\delta = \frac{\delta^3}{3}}$$

$$Q = \frac{b\rho g \sin\alpha\,\delta^3}{3\eta} \Rightarrow \delta = \sqrt[3]{\frac{3\eta Q}{b\rho g \sin\alpha}}$$

geg. ist kin. Viskosität $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ $\Rightarrow$ $\delta = \sqrt[3]{\frac{3Q\nu}{b g \sin\alpha}}$

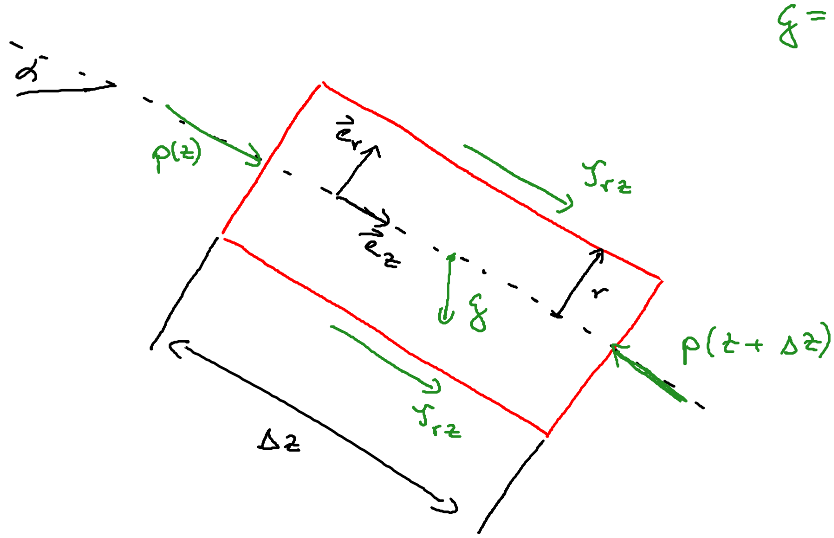
78. Betrachtet wird ein Rohr (Radius R, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen α), durch das eine Newtonsche Flüssigkeit (dynamische Viskosität η, Dichte ρ) fließt. Der Volumenstrom sei Q. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $\mathbf{v}(r)$ bei stationärer Strömung ***in Abhängigkeit von dem Volumenstrom Q.***



Annahme: Nehmen Sie an, dass der Druck p nur von z abhängt.
Geg.: R, Q, η, α, g

Freischnitt eines zylindrischen, konzentrischen Flüssigkeitsvolumens

$G = \pi r^2 \Delta z\, \rho\, g$



GGW, da stationär, $v = v(r)$

$$\Sigma F_z = 0 = \big(p(z) - p(z+\Delta z)\big)\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} + \tau_{rz}\, 2\cancel{\pi}\cancel{r}\,\Delta z + \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}\Delta z\, \rho g \sin\alpha$$

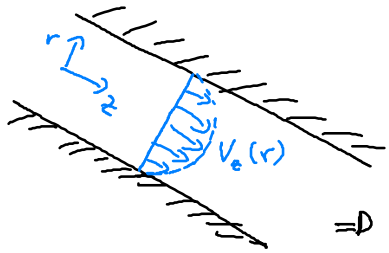
$$\Leftrightarrow \quad 0 = -r\underbrace{\frac{p(z+\Delta z) - p(z)}{\Delta z}}_{\frac{dp}{dz}} + 2\tau_{rz} + r\rho g \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{rz} = -\frac{r\rho g \sin\alpha}{2} + \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} \quad (1)$$

Materialgesetz: Newtonscher Schubspannungsansatz

$$\tau_{rz} = \eta \frac{dv_z}{dr} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Die Schubspannung ist negativ, da $\frac{dv}{dr} < 0$!



$$\Rightarrow \quad \frac{dv_z}{dr} < 0 \;!$$

(2) in (1):

$$\eta \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2}\frac{dp}{dz} - \frac{r\rho g \sin\alpha}{2}$$

Es soll angenommen werden, dass der Druck im Querschnitt konstant sein $\Rightarrow p = p(z)$

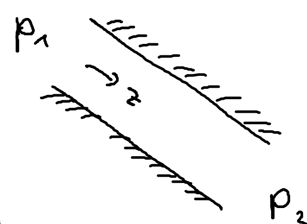
$\hookrightarrow$ Für dünne Rohre gerechtfertigt

Integration

$$v(r) = \left(\frac{dp}{dz}(z)\frac{r^2}{4} - \rho g \sin\alpha \frac{r^2}{4} + C\right)\frac{1}{\eta}$$

Haftbedingung: $v(R) = 0 \Rightarrow C = \left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dz}\right)\frac{R^2}{4}$

$$\boxed{\Rightarrow \quad v(r) = \frac{1}{4\eta}\left\{\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dz}\right)\left(R^2 - r^2\right)\right\} \quad (3)}$$



$\frac{dp}{dz} > 0$, $p_1 < p_2$

< 0, $p_1 > p_2$

Bestimmung von $v(r)$ in Abhängigkeit des Volumenstroms Q

$$Q = \int v(r)\,dA = 2\pi\int_0^R v(r)\, r\, dr = \frac{\pi}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dz}\right)\underbrace{\int_0^R R^2 r - r^3\, dr}_{\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dz}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dz} = \frac{8 Q \eta}{\pi R^4} \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (3) \Rightarrow \quad v(r) = \underbrace{\frac{2Q}{\pi R^2}}_{v_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$