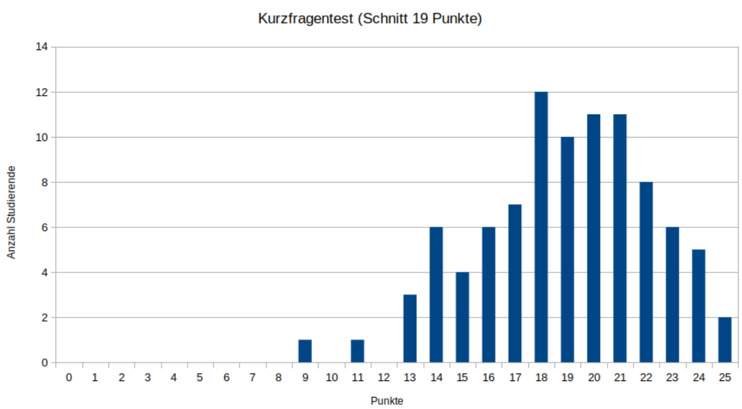
6. Plenarübung

Kurzfragentest



Einheiten Volumenkraft

7. VL: Druckverteilung bei bel. Volumenkraft

$$\vec{f} = \text{grad}\, p$$

Volumenkraft $\left[\frac{kg}{m^2 s^2}\right]$, z. Gravitation

$$\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$$

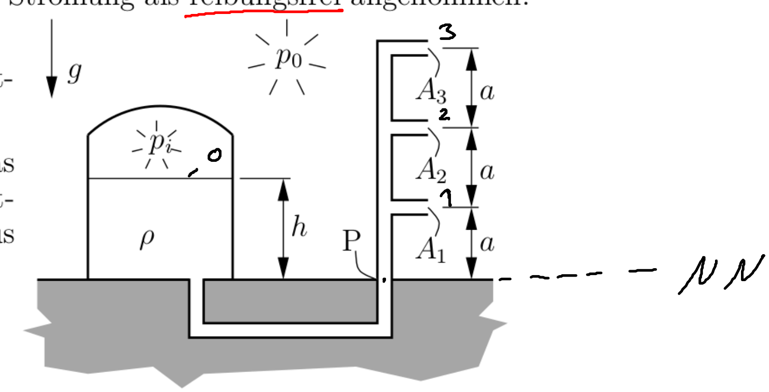
– Evaluation auf der Internetseite!

Thema: Impulssatz

71. Ein Wasserleitungssystem wird aus einem Druckbehälter gespeist. Aus allen drei Austrittsquerschnitten soll der gleiche Volumenstrom austreten. Die Füllhöhe h des Druckbehälters sei konstant. Das Wasser wird als inkompressibel und die Strömung als reibungsfrei angenommen.

(a) Berechnen Sie die dazu erforderlichen Querschnitte A_2 und A_3!

(b) Berechnen Sie das Moment um den Punkt P, das durch den Rückstoß des austretenden Wassers entsteht. *Hinweis:* Die Ergebnisse für v_1, v_2 und v_3 aus Aufgabenteil (a) sollen nicht eingesetzt werden.



Geg.: A_1, p_0, p_i, a, h, ρ, g.

a) Volumenstrom, $Q_j = A_j v_j$, soll gleich sein für alle Austrittsquerschnitte

Zunächst Geschwindigkeiten v_j mit Bernoulli:

$\underline{0 \to 1}$

$$\frac{p_i}{\rho} + \underbrace{\frac{v_0^2}{2}}_{=0,\text{ Füllhöhe ist konstant}} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + ga \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-a)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2\left[\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-a)\right]}$$

analog $\underline{0 \to 2}$

$$v_2 = \sqrt{2\left[\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-2a)\right]}$$

analog $\underline{0 \to 3}$

$$v_3 = \sqrt{2\left[\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-3a)\right]}$$

Querschnitte A_2, A_3 für konstante Volumenströme

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = A_1 \frac{v_1}{v_2} = A_1 \sqrt{\frac{\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-a)}{\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-2a)}}$$

analog
$$A_3 = A_1 \frac{v_1}{v_3} = A_1 \sqrt{\frac{\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-a)}{\frac{p_i - p_0}{\rho} + g(h-3a)}}$$

Es folgt: $A_3 > A_2 > A_1$

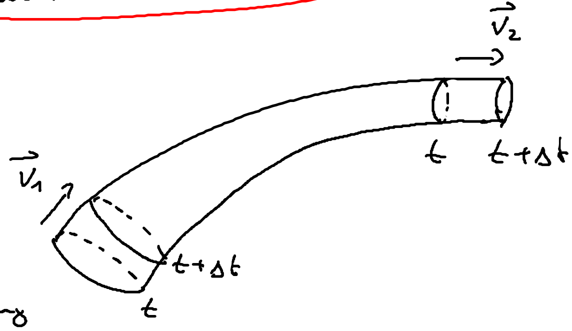
b) Moment um den Punkt P durch Rückstoß des Wassers

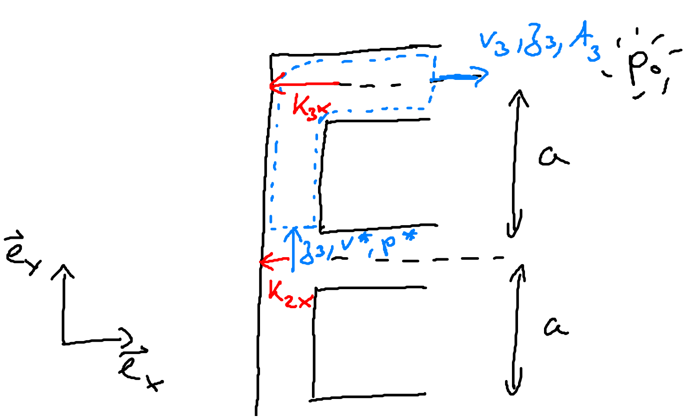
$\underline{\text{Impulssatz}}$

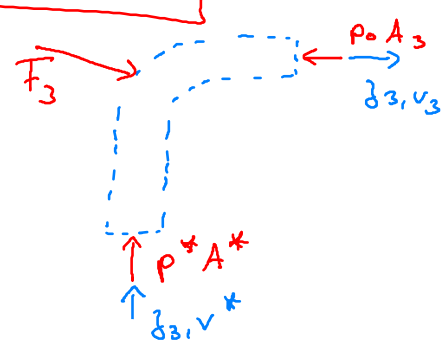
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta t}}_{\dot{m}}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}$$

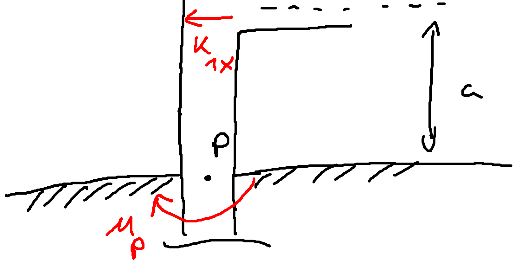
$\Rightarrow$ Änderung der Richtung des Massenstroms wird durch eine Kraft $\vec{F}$ verursacht.







Die resultierende Kraft auf die Stromröhre setzt



sich aus den Druckkräften und der vom Rohr auf die Flüssigkeit ausgeübten Kraft zusammen.

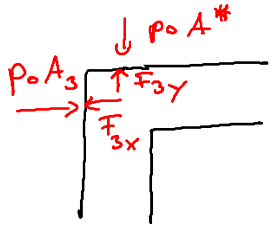
Impulssatz:

$$\zeta_3 (v_3 \vec{e}_x - v^* \vec{e}_y) = (p^* A^* - F_{3y})\,\vec{e}_y + (F_{3x} - p_0 A_3)\,\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \quad F_{3x} = \zeta_3 v_3 + p_0 A_3$$

Die vertikale Komponente spielt für das Momenten-GGW keine Rolle.

Nach "actio = reactio" wirkt auf das Rohr die gleiche, entgegengesetzte Kraft:



Die resultierende horizontale Kraft ist $K_{3x} = F_{3x} - p_0 A_3$
$= \zeta_3 v_3$

analog: $K_{2x} = \zeta_2 v_2$, $K_{1x} = \zeta_1 v_1$

Momenten-GGW: $\sum M^P = 0 = M_P - K_{1x} a - K_{2x} 2a - K_{3x} 3a$

$$\Rightarrow \quad M_P = a(\zeta_1 v_1 + 2\zeta_2 v_2 + 3\zeta_3 v_3)$$
$$= a\rho(A_1 v_1^2 + 2A_2 v_2^2 + 3A_3 v_3^2)$$

Massenstrom $\zeta = \rho A v$

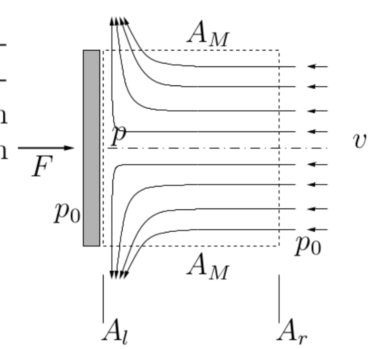
mit $A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 \Rightarrow$

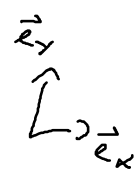
$$\underline{\underline{M_P = a\rho A_1 v_1 (v_1 + 2v_2 + 3v_3)}}$$

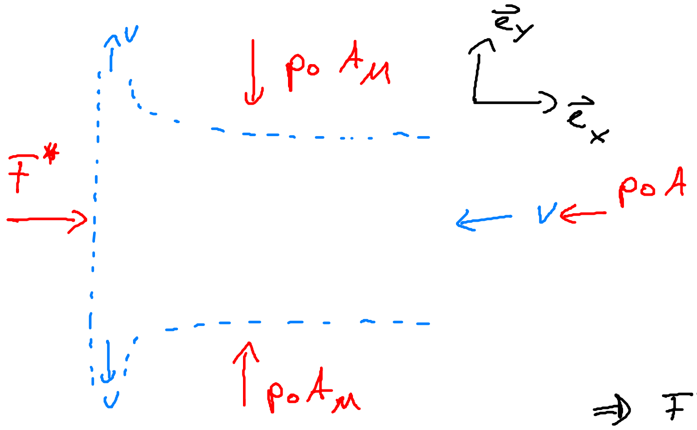
Kommentar: Die Druckkraft des Umgebungsdrucks wird im Impulssatz häufig nicht explizit berücksichtigt. → Fällt häufig weg.

72. Eine starre Platte der Fläche A wird bei Windstille aus dem Fenster eines mit konstanter Geschwindigkeit v fahrenden Autos gehalten. Berechnen Sie die Kraft, die aufgebracht werden muß, um die Platte im Gleichgewicht zu halten. Schubspannungen dürfen vernachlässigt werden.

Geg.: $\varrho = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, p_0, $A = 100 \text{cm}^2$





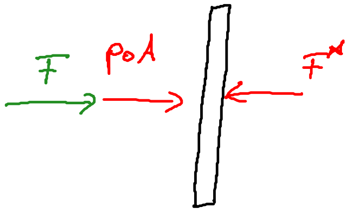


Impulssatz

$$\zeta([v - v]\vec{e}_y - (-v)\vec{e}_x) = (p_0 A_M - p_0 A_M)\vec{e}_y + (-p_0 A + F^*)\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \quad F^* = \zeta v + p_0 A$$

"actio = reactio": auf die Platte wirkt ebenfalls die Kraft F^*!



$$\Rightarrow \quad \underline{F} = F^* - p_0 A = \dot{I} v = \rho A v^2 \approx 10 \, \frac{kg\,m}{s^2}$$

Nachtrag zu Balkenschwingungen

Was passiert, wenn der Balken unter axiale Vorspannung gesetzt wird?

$$\Rightarrow \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (*)$$

Lösung $\quad w(x,t) = W(x) \cdot \cos(\omega t - \alpha)$

$$W(x) = A \cosh(\varkappa x) + B \sinh(\varkappa x) + C \cos(\varkappa x) + D \sin(\varkappa x)$$

Bestimmung von $\varkappa$:

setzen z.B. $\cosh(\varkappa x)\cos(\omega t - \alpha)$ in $(*)$:

$$EI\varkappa^4 - \rho A \omega^2 - P\varkappa^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varkappa^2 = \frac{P}{2EI} + \sqrt{\frac{P^2}{4EI} + \frac{\rho A \omega^2}{EI}}$$

Ohne Vorspannung:
d.h. $P = 0$
$$\varkappa^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

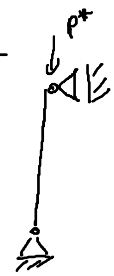
Auswerten der RB:

$$\Rightarrow \quad \varkappa_n \ell = n\pi$$

$$\omega_n = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(n^4 + n^2 \frac{P\ell^2}{\pi^2 EI} \right)}$$

$$= \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(n^4 + n^2 \frac{P}{P^*_{1c}} \right)}$$

Knickstab



$$P^*_{1c} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$\Rightarrow$ Wenn mit der Knicklast gedrückt wird, dann ist die erste Eigenfrequenz null!