5. Übung – Kontinuumsmechanik

- Kurzfragentest am Di 07.01.2020, 18:30 – 19:30
- Alle Themen bis einschließlich VL 10 (nächste Woche)
- Zur Übung: • Kurzfragenteile aus letzten Durchläufen (Achtung: keine MC-Struktur) jetzt online
  • Kurzfragen aus der Vorlesung
- Tutorien in der nächsten Woche: Bitte bereitet Fragen vor! Es wird genug Zeit geben einzelne Kurzfragen zu besprechen!

- Extra Sprechstunde: Am Montag 06.01.2020 gibt es eine Zusatzsprechstunde von Donata 10:00 – 12:00
  (Reguläre Sprechstunden: Mo 12–15:30, Di 12 – 14)

- Vorlesung am 20.12.: Alle sollten kommen, letzte VL vor Test!

- HA $\boxed{55}$ schlecht gestellt ⟶ Kommt nicht in den schriftlichen Test

Themen heute

- Hydrostatik (Aufgabe 60)
- Hydrodynamik → Kurzfragen
  → Bernoulli für kompressible Medien
  → Aufgabe 64

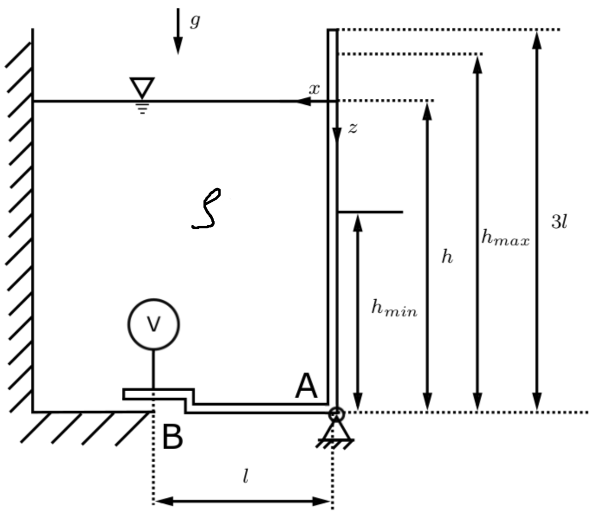
Hydrostatik

60. Es wurde der skizzierte Mechanismus konstruiert, um sowohl bei einem zu hohen als auch einem zu niedrigen Wasserpegel h Wasser aus einem Behälter abzulassen. Die rechtwinklige Klappe mit den Abmaßen l, $3l > h_{max}$ und der Breite b ist im Punkt A gelenkig gelagert und liegt im Punkt B auf. Außerdem ist im Punkt B ein vom Wasser vollständig umschlossener Ballon mit dem Volumen V über einen dünnen Faden an der Klappe befestigt. Der Faden, der Ballon und die Klappe seien masselos. Geg.: g, V, ρ, l, b

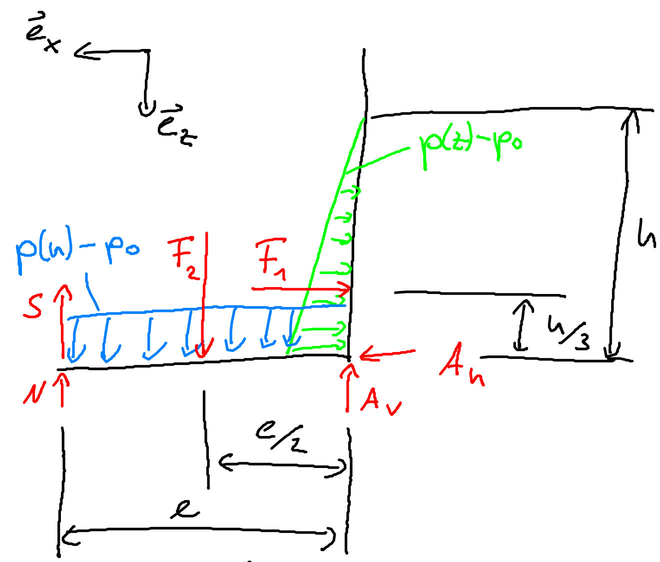
(a) Schneiden Sie die Klappe frei und bestimmen Sie in Abhängigkeit des Wasserpegels h die Auflagerreaktionen im Punkt A und die Normalkraft N im Punkt B.

(b) Lesen Sie aus dem oben rechts stehenden Diagramm für $V = \frac{1}{12}bl^2$ die minimale und maximale Höhe, h_{min} und h_{max}, ab, bei der sich jeweils die Klappe öffnet.

(c) Für welche Werte von V ist die Klappe niemals geschlossen?



Freischnitt der Klappe



Auftriebskraft des Ballon

$$S = \rho g V$$

Wasserlasten

$$F_1 = \int_0^h (p(z)-p_0)\, b\, dz = \int_0^h \rho g z b\, dz = \rho g b \frac{h^2}{2}$$

$$F_2 = \rho g h b l$$

GGW

$$\Sigma F_x = 0 = -F_1 + A_h \Rightarrow A_h = \rho g b \frac{h^2}{2}$$

$$\Sigma M^{(A)} = 0 = F_2 \frac{l}{2} - (N+S)l - F_1 \frac{h}{3}$$

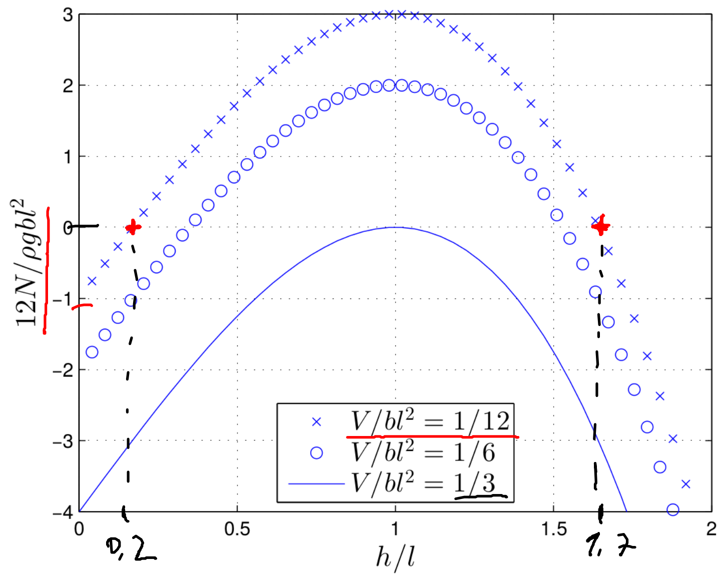
$$\Rightarrow N = \frac{F_2}{2} - S - \frac{F_1}{3}\frac{h}{l} = \frac{1}{2}\rho g h b l - \rho g V - \rho g b \frac{h^3}{6l}$$

$$\Sigma F_z = 0 = F_2 - A_v - S - N$$

$$= \rho g h b l - A_v - \cancel{\rho g V} - \frac{1}{2}\rho g h b l + \cancel{\rho g V} + \rho g b \frac{h^3}{6l} \Rightarrow \frac{1}{2}\rho g h b l + \rho g b \frac{h^3}{6l} = A_v$$

b) Klappe öffnet sich, wenn die Normalkraft N verschwindet

$$N = \frac{1}{12} \rho g b l^2 \left(-2 \frac{h^3}{l^3} + 6 \frac{h}{l} - \frac{12 V}{b l^2} \right)$$



Fall $V = \frac{1}{12} b l^2$

$$\Rightarrow \frac{12 N}{\rho g b l^2} = -2 \frac{h^3}{l^3} + 6 \frac{h}{l} - 1$$

Ablesen: $h_{min} \approx 0{,}2 l$

$h_{max} \approx 1{,}7 l$

c) Wie groß muss V sein, damit die Klappe sich immer öffnet?

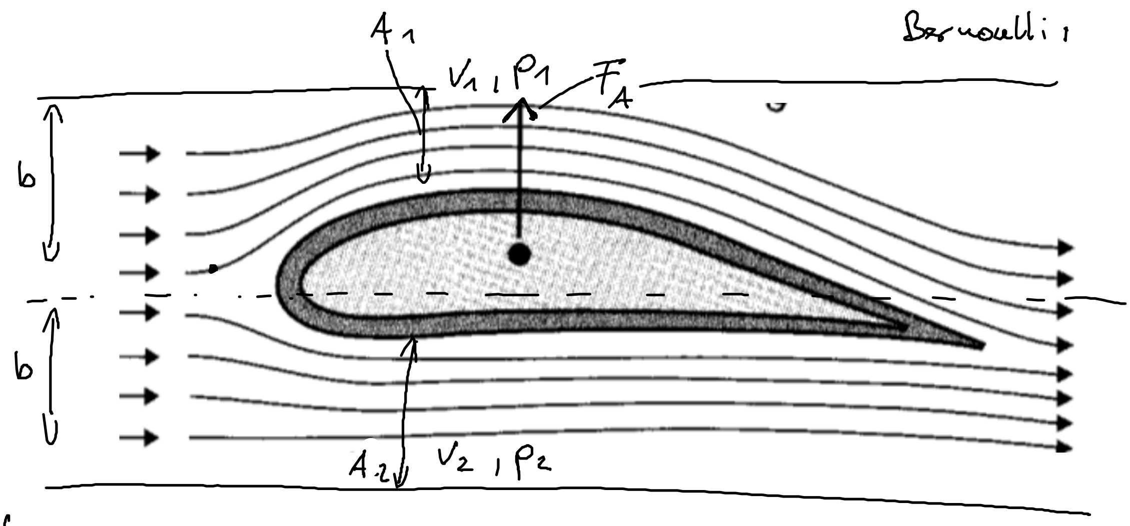
Ablesen: Wenn $V > \frac{1}{3} b l^2$ ist N immer negativ $\Rightarrow$ Klappe öffnet sich!

Hydrodynamik

Korrektur zur VL heute morgen

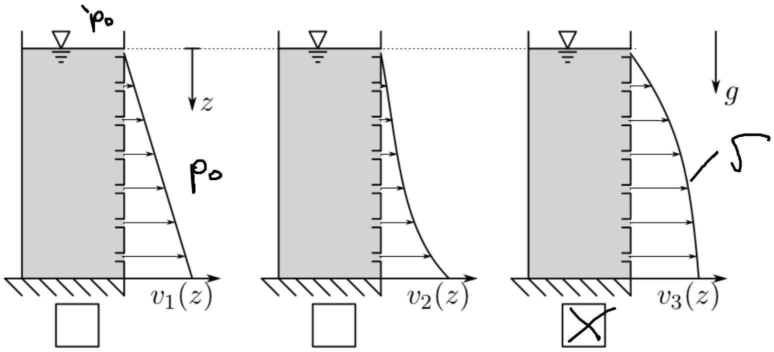
Konti: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 > v_2$

Bernoulli: $p_2 > p_1$



Kurzfragen

1. Aus einem Behältnis mit konstantem Wasserstand strömt über die Höhe z verteilt Wasser aus. Welcher der skizzierten Verläufe der Austrittsgeschwindigkeit $v(z)$ wird sich einstellen?



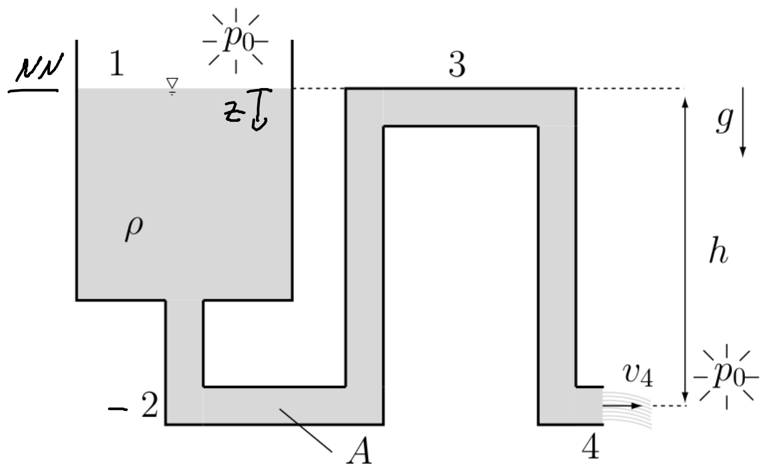
Bernoulli: $\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} v^2(z) - g z$

$\Rightarrow \boxed{v(z) = \sqrt{2gz}}$ Formel von Toricelli

2. An welcher Stelle des Systems herrscht der geringste statische Druck im Fluid (grau)? Der Rohrdurchmesser A sei konstant und das Fluid inkompressibel und reibungsfrei.

   ☐ Stelle 1 ☐ Stelle 2

   ☒ Stelle 3 ☐ Stelle 4

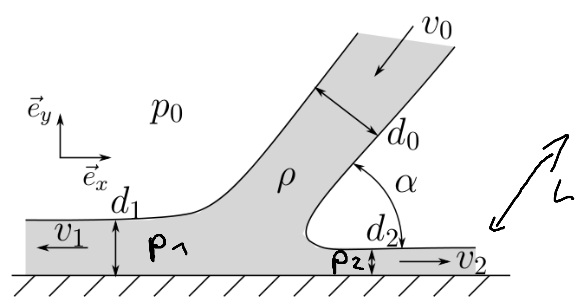


Kontinuitäts-Gleichung: $A v = const.$ $\Rightarrow A v_2 = A v_3 = A v_4 \Rightarrow v_2 = v_3 = v_4 := v$

Bernoulli – " – : $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \phi = const.$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - gh = \frac{p_3}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - gh = const.$$

3. Ein offener Strahl eines reibungsfreien Fluids (Dichte ρ, Breite d_0) trifft mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α auf eine feste Wand und wird in zwei Teile aufgespalten. Der Strahl sei über die Länge L senkrecht zur Zeichenebene ausgedehnt. Die Strömung sei stationär, es herrsche keine Gravitation. Was gilt für die Geschwindigkeiten der Teilstrahlen v_1 und v_2?



   ☐ $v_1 = \frac{d_1}{d_2}v_0,\ v_2 = \frac{d_2}{d_1}v_0$ ☒ $v_1 = v_2 = v_0$

   ☐ $v_1 = \frac{d_2}{d_1}v_0,\ v_2 = \frac{d_1}{d_2}v_0$ ☐ $v_1 = v_0 \cos\alpha,\ v_2 = v_0 \sin\alpha$

Freie Strömung ohne Volumenkräfte → stat Druck $p_1 = p_2 = p_0$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 \Rightarrow v_1 = v_2 = v_0$$

Kompressible Medien, d.h. $\rho \neq const.$

→ Bernoulli: Gleichung wie bisher nicht gültig

Im allg. Fall gilt: $\frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{\nabla}\phi = \text{const}$ entlang einer Stromlinie!

Für kompressible Medien gilt $\rho = \rho(p)$

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(p)} + \vec{\nabla}\phi = \text{const.}$$

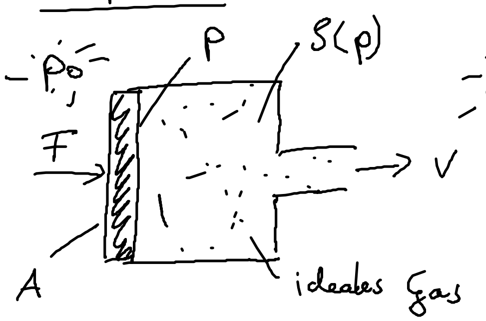
Integration: $\boxed{\frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \phi = \text{const}}$ Bernoulli für kompressible Medien

Ideales Gas

Für ein ideales Gas: $\rho = \frac{p}{b}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{2} + b \ln(p) + \phi = \text{const.}}$$

Beispiel 7 (analog zu Bsp. 6)



$$b \ln(p) = \frac{v^2}{2} + b \ln(p_0) \Rightarrow v = \sqrt{2b \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}$$

spez. Gaskonst.

Bsp Luft: $b = R_s T \approx 287 \frac{J}{kg\,K} \cdot 283\,K$

absolute Temperatur

$$\approx 280^2 \frac{m^2}{s^2} \approx (0{,}85 c)^2$$

$$\approx 0{,}7 c^2$$

c – Schallgeschwindigkeit $343 \frac{m}{s}$

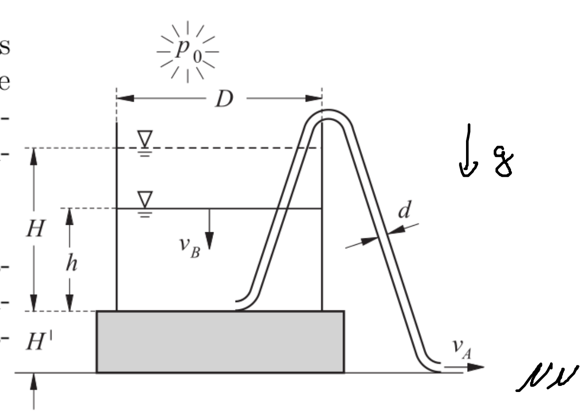
Annahme: $p = 2 p_0$

$v \approx c$

64. Auf einem Podest der Höhe $H' = 0,5$m steht ein großes Gefäß (Durchmesser $D = 1$m), welches bis zu Höhe $H = 1$m mit Wasser gefüllt ist (vgl. nebenstehende Skizze). Dieses Gefäß wird mit Hilfe eines Schlauches (Durchmesser $d = 1$cm) nach dem Heberprinzip entleert.

(a) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Wasseraustrittsgeschwindigkeit $v_A = f(h)$ am Schlauchende in Abhänigkeit von der veränderlichen Wasserhöhe h im Behälter?

(b) Wie groß ist bei reibungsloser Strömung die Entleerungszeit T des Behälters?



Annahmen

- stationäre Strömung
- reibungsfrei
- inkompressibel

$$\left.\begin{array}{l}\text{- stationäre Strömung}\\ \text{- reibungsfrei}\\ \text{- inkompressibel}\end{array}\right\} \quad \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \phi = \text{const.}$$

a) $$\frac{p_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + (H'+h)g = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2}$$

Kontinuitätsglg.: $v_B \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = v_A \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow v_B = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_A$$

Da $D^2 \gg d^2$ gilt auch $v_B \ll v_A$! v_B ist in der Bernoulli-Glg. gegenüber v_A zu vernachlässigen.

$$\Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2g(H'+h)}} \text{ — Toricelli}$$

b) Entleerungszeit

$$v_B = -\frac{dh}{dt}$$

$$T = \int_0^T dt = -\int_H^0 \frac{dh}{v_B} = \int_0^H \frac{dh}{v_B}$$

mit $v_B = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_A$ und v_A:

$$T = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{H'+h}} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[2\sqrt{H'+h}\right]_0^H$$

$$= \left(\frac{D}{d}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H'+H} - \sqrt{H'}\right)$$

mit Werten aus Aufgabenstellung $T = 2337\,s$