4. Übung

Organisatorisches

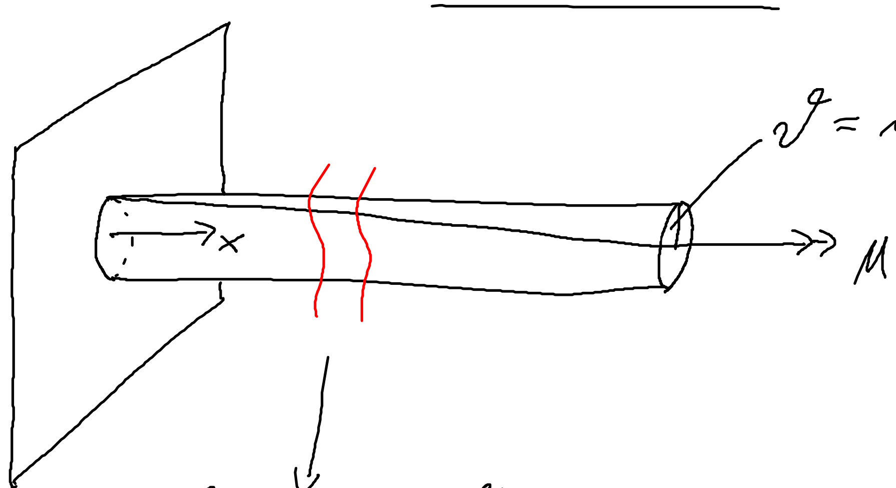
- Anmeldung für die Portfolioprüfung endet morgen! 30.11.
- Vorlesung am 13.12. im HO104 statt EB301

Themen

- Torsionsschwingungen
- Hydrostatik

Torsionsschwingungen

$\vartheta = \vartheta(x,t)$ – Verdrehwinkel



MTM – Zylinder

$J = \frac{1}{2} m R^2$

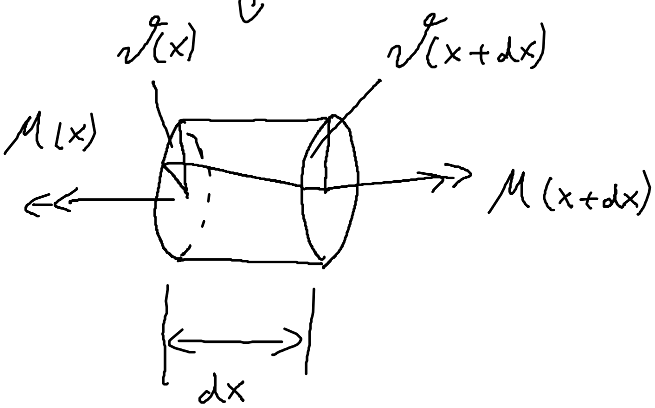
pol. FTM

$I_p = \frac{1}{2} \pi R^4$

Material-Struk.-Gesetz

$M = G I_p \vartheta'$

G – Schubmodul, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Drallsatz

$$J \ddot{\vartheta} = M(x+dx) - M(x)$$

$$\frac{1}{2} dm\, R^2 \ddot{\vartheta} = M(x+dx) - M(x)$$

$$\frac{1}{2} \rho \pi R^2 dx\, R^2 \ddot{\vartheta} = M(x+dx) - M(x)$$

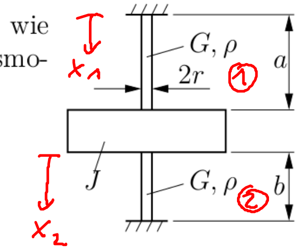
$$\rho I_p \ddot{\vartheta} = M'(x)$$

$$\rho I_p \ddot{\vartheta} = G I_p \vartheta''(x) \Rightarrow \boxed{\ddot{\vartheta} = \underbrace{\frac{G}{\rho}}_{c^2} \vartheta''}$$

Wellengleichung (1)

24. Ein kreiszylindrischer Draht mit dem Radius r und der Dichte ρ sei wie skizziert eingespannt und mit einer Scheibe mit dem Massenträgheitsmoment J verbunden. Ermitteln Sie die Frequenzgleichung.

Geg.: G, ρ, J, a, b, r.



Ansatz von Bernoulli:

$$\vartheta(x,t) = \Theta(x)\, T(t)$$

in (1):

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{\Theta''}{\Theta} = -\omega^2$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2)$$

$$\Theta'' + \frac{\omega^2}{c^2}\Theta = 0 \quad (3)$$

Allgemeine Lösungen für Bereiche 1, 2

$$\Theta_1(x_1) = A_1 \cos\frac{\omega}{c}x_1 + B_1 \sin\frac{\omega}{c}x_1$$

$$\Theta_2(x_2) = A_2 \cos\frac{\omega}{c}x_2 + B_2 \sin\frac{\omega}{c}x_2$$

Rand- und Übergangsbed.

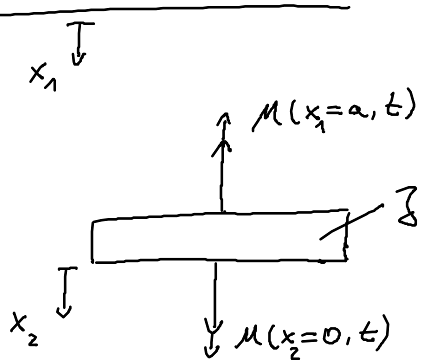
$$\Theta_1(x_1=0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\Theta_1(x_1=a) = \Theta_2(x_2=0) \Rightarrow B_1 \sin\frac{\omega}{c}a = A_2$$

$$\Theta_2(x_2=b) = 0 \Rightarrow A_2 \cos\frac{\omega}{c}b + B_2 \sin\frac{\omega}{c}b = 0$$

$$\Rightarrow B_1 \sin\frac{\omega}{c}a \cos\frac{\omega}{c}b + B_2 \sin\frac{\omega}{c}b = 0 \quad (4)$$

Freischnitt der Scheibe



Drallsatz

$$J\ddot{\vartheta}_2(x_2=0,t) = M(x_2=0,t) - M(x_1=a,t)$$

$$\text{MSG} \rightarrow J\ddot{\vartheta}_2(x_2=0,t) = G I_p \left[\vartheta_2'(x_2=0,t) - \vartheta_1'(x_1=a,t)\right]$$

$$-J\omega^2 \Theta_2(0) T(t) = G I_p T(t) \left[\Theta_2'(0) - \Theta_1'(a)\right]$$

$$-J\omega^2 B_1 \sin\frac{\omega}{c}a = G I_p \frac{\omega}{c}\left[B_2 - B_1 \cos\frac{\omega}{c}a\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad B_1\left(G I_p \frac{\omega}{c} \cos\frac{\omega}{c}a - \zeta \omega^2 \sin\frac{\omega}{c}a \right) - B_2\, G I_p \frac{\omega}{c} = 0 \quad (5)$$

(4) und (5) in Matrixform:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \sin\frac{\omega}{c}a \cos\frac{\omega}{c}b & \sin\frac{\omega}{c}b \\ \hline G I_p \frac{\omega}{c} \cos\frac{\omega}{c}a - \zeta\omega^2 \sin\frac{\omega}{c}a & -G I_p \frac{\omega}{c} \end{array}\right]}_{M} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nichttriviale Lösungen ex., falls $\det(M) = 0$!

$$-G I_p \frac{\omega}{c} \sin\frac{\omega}{c}a \cos\frac{\omega}{c}b - \sin\frac{\omega}{c}b \left(G I_p \frac{\omega}{c} \cos\frac{\omega}{c}a - \zeta\omega^2 \sin\frac{\omega}{c}a \right) = 0$$

$$-G I_p \frac{\omega}{c} - \tan\frac{\omega}{c}b \left(G I_p \frac{\omega}{c} \frac{1}{\tan\frac{\omega}{c}a} - \zeta\omega^2 \right) = 0$$

$$\boxed{1 + \frac{\tan\frac{\omega}{c}b}{\tan\frac{\omega}{c}a} - \frac{\omega c \zeta}{G I_p} \tan\frac{\omega}{c}b = 0}$$

Frequenzgl.
nur numerisch lösbar

Grafische Lösung für $a=b$

$$c^2 = \frac{G}{\rho}$$

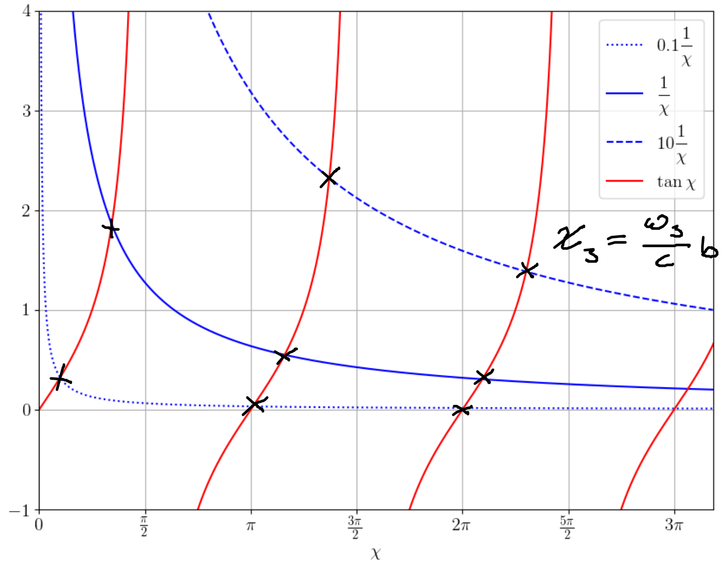
$$\Rightarrow \tan\frac{\omega}{c}b = \frac{2 G I_p}{\omega c \zeta} = \frac{2 G I_p b}{c^2 \zeta} \frac{c}{\omega b} \overset{!}{=} \frac{2 \rho I_p b}{\zeta} \frac{c}{\omega b} = \frac{2\rho \frac{1}{2}\pi R_s^4 b}{\zeta} \frac{c}{\omega b} = \frac{2 m_s \frac{1}{2} R_s^2}{\zeta} \frac{c}{\omega b}$$

$$= \frac{\zeta_s}{\zeta} \frac{c}{\omega b}$$

$$x = \frac{\omega}{c}b, \quad \hat{c} = \frac{\zeta_s}{\zeta}$$

ζ_s – MTM der Stäbe

$\Rightarrow$ $\boxed{\tan\chi = \frac{C}{\chi}}$

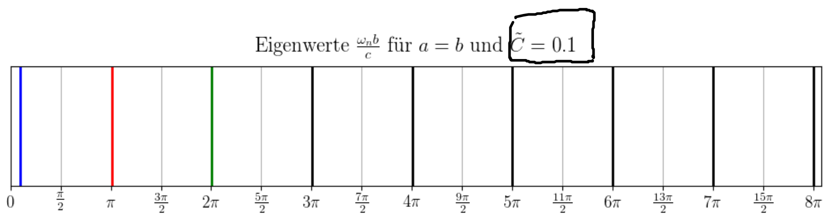


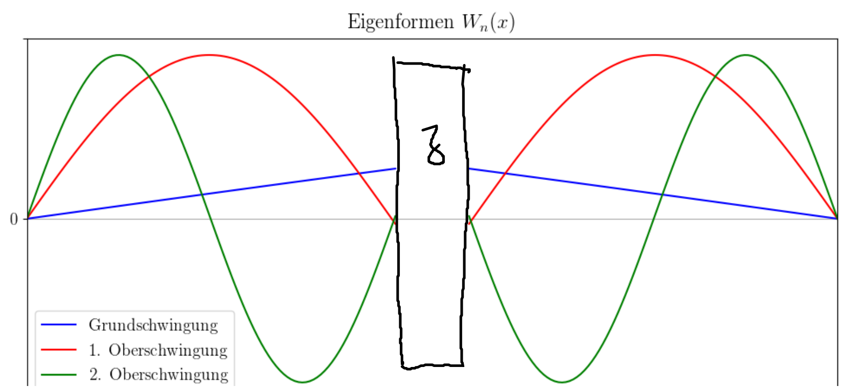
$\chi_3 = \frac{\omega_3}{c} b$ mit (4),

Eigenformen

$$\Theta_{1n}(x_1) = B_{1n} \sin \frac{\omega_n}{c} x_1$$

$$\Theta_{2n}(x_2) = B_{1n} \sin \frac{\omega_n}{c} a \left(\cos \frac{\omega_n}{c} x_2 - \frac{\sin \frac{\omega_n}{c} x_2}{\tan \frac{\omega_n}{c} b} \right)$$

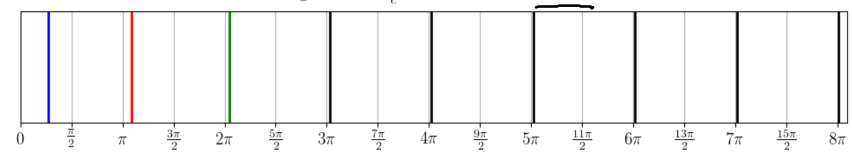




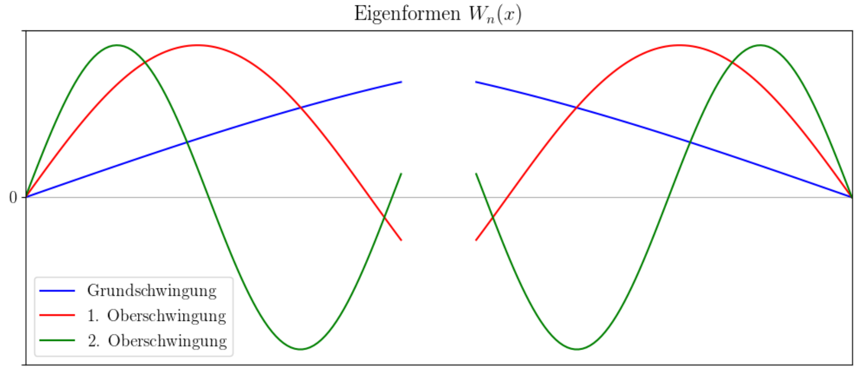
Trägheit Scheibe $\gg$ Trägheit d. Stäbe

$\zeta = 10\,\zeta_s$

Eigenwerte $\frac{\omega_n b}{c}$ für $a = b$ und $\tilde{C} = 1$



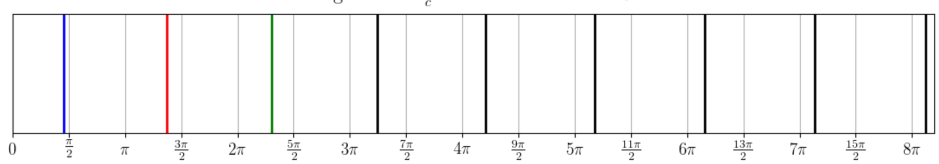
Eigenformen $W_n(x)$



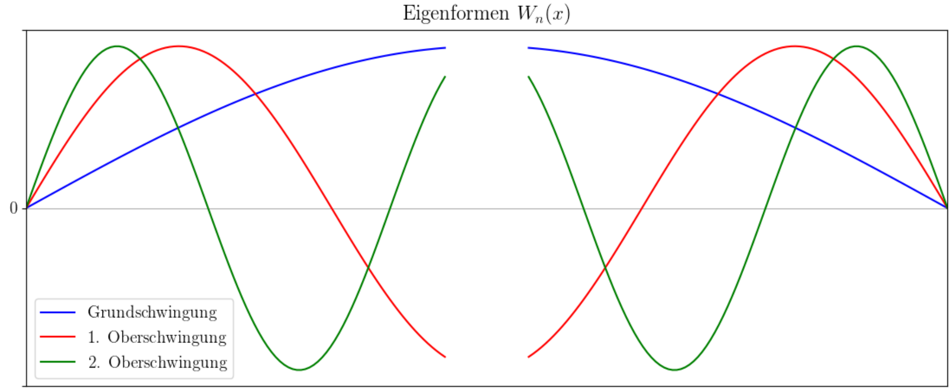
$\zeta = \zeta_s$

$\tilde{C} = 1$

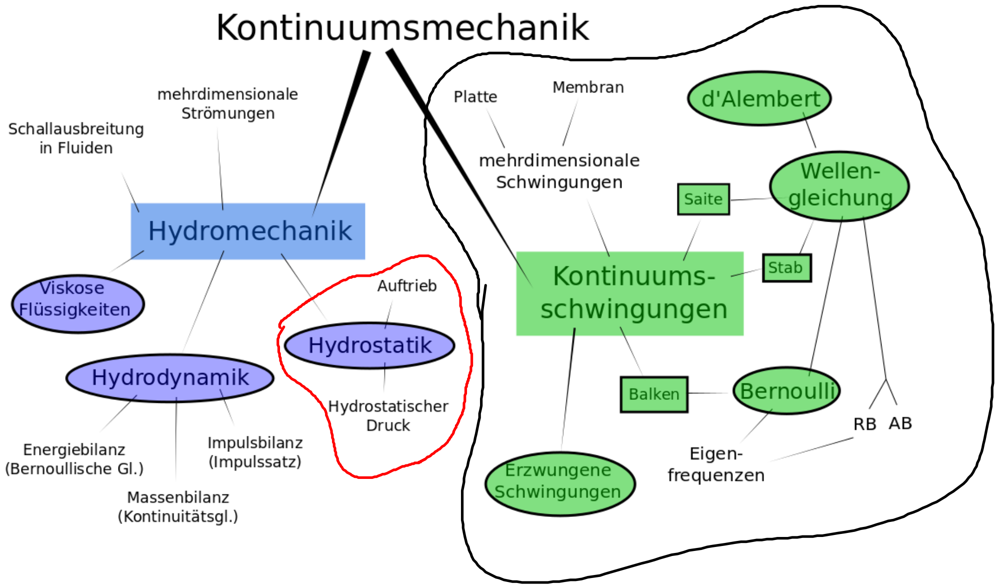
Eigenwerte $\frac{\omega_n b}{c}$ für $a = b$ und $\tilde{C} = 10$



Eigenformen $W_n(x)$



$\zeta = 0{,}1\,\zeta_s$



Hydrostatik

Aus 7. VL: $\boxed{\vec{f} = \text{grad}\, p}$

$\vec{f}$ – Volumenkraft $\left[\frac{Kg}{m^2 s^2}\right]$

z.B. gravitation $\vec{f} = -\varrho g \vec{e}_z$

p – Druck in einer Flüssigkeit

ϱ – Dichte

Der Gradient Operator

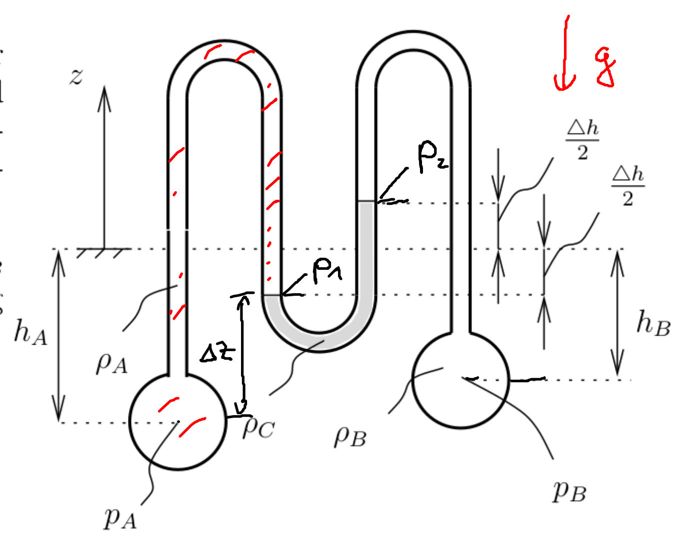
$$\text{grad}\, p = \vec{\nabla} p = \frac{\partial}{\partial x} p \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} p \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} p \vec{e}_z$$

Der Gradient angewendet auf ein Skalarfeld (z.B. Druck) liefert ein Vektorfeld mit den Änderungen in die KO-Richtungen

52. Zwei mit (inkompressiblen) Flüssigkeiten der Dichten ρ_A bzw. ρ_B gefüllte Behälter sind in der skizzierten Weise über ein U-Rohr-Manometer verbunden. Die Dichte der Manometerflüssigkeit ist ρ_C.

Wie groß ist die Druckdifferenz $p_A - p_B$ in Abhängigkeit vom Manometerausschlag $\triangle h$?

Geg.: h_A, h_B, $\triangle h$, ρ_A, ρ_B, ρ_C



$$\vec{f} = \text{grad}\, p$$

$$-\rho g \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial z} p \vec{e}_z \quad \Big| \int$$

$$p(z) - \underbrace{p(z_0)}_{p_0} = -\rho g (z - z_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(z) = p_0 - \rho g (z - z_0)}$$

$$p_1 = p_A - \rho_A g \left(h_A - \frac{\Delta h}{2}\right) \quad (1)$$

$$p_2 = p_1 - \rho_c g (\Delta h) \quad (2)$$

$$p_2 = p_B - \rho_B g \left(h_B + \frac{\Delta h}{2}\right) \quad (3)$$

p_1 und p_2:

$$p_B - \rho_B g \left(h_B + \frac{\Delta h}{2}\right) = p_A - \rho_A g \left(h_A - \frac{\Delta h}{2}\right) - \rho_c g (\Delta h)$$

$$\boxed{g\left\{\rho_A h_A - \rho_B h_B + \Delta h \left(\rho_c - \frac{1}{2}\rho_B - \frac{1}{2}\rho_A\right)\right\} = p_A - p_B}$$