# 3. Übung / 5. Vorlesung

Thema: – Erzwungene Balkenschwingungen

– Zweidimensionale Schwingungen

**Organisatorisches**

– VL 22.11.2019 – wie immer im EB301 (Infoblatt war falsch – Onlineversion aktuell)

→ Experiment. Alle kommen!

– Achtung: Raumwechsel in den Tutorien nächste Woche:

– Do, 21.11.2019, 14 – 16 Uhr, Philip K., MA 851 statt H 3002

– Fr, 22.11.2019, 10 – 12, Liesa, MA 851 statt H 3013

– Fr, 22.11.2019, 12 – 14, Liesa, MA 850 statt H 3013

## Nachtrag zu freien Balkenschwingungen

**Tabelle 4.1** Eigenwerte für verschiedene Lagerungen

| Lagerung | charakt. Gleichung |
|---|---|
| gelenkig–gelenkig | $\sin \kappa l = 0$ |
| eingespannt–frei | $\cosh \kappa l \cos \kappa l + 1 = 0$ |
| eingespannt–gelenkig | $\tan \kappa l - \tanh \kappa l = 0$ |
| eingespannt–eingespannt | $\cosh \kappa l \cos \kappa l - 1 = 0$ |
| frei–frei | $\cosh \kappa l \cos \kappa l - 1 = 0$ |

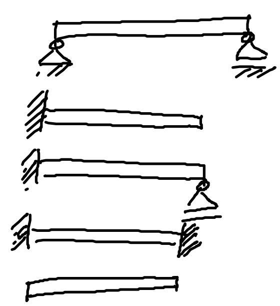



**Tabelle 4.1** Eigenwerte für verschiedene Lagerungen (Fortsetzung)

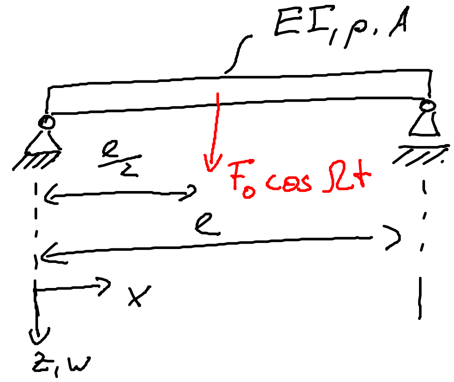
| Lagerung | $\kappa_1 l$ | $\kappa_2 l$ | $\kappa_3 l$ | $\kappa_k l \, (k > 3)$ |
|---|---|---|---|---|
| gelenkig–gelenkig | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $k\pi$ |
| eingespannt–frei | 1,875 | 4,694 | 7,854 | $\approx (2k-1)\frac{\pi}{2}$ |
| eingespannt–gelenkig | 3,927 | 7,069 | 10,210 | $\approx (4k+1)\frac{\pi}{4}$ |
| eingespannt–eingespannt | 4,730 | 7,853 | 10,996 | $\approx (2k+1)\frac{\pi}{2}$ |
| frei–frei | 4,730 | 7,853 | 10,996 | $\approx (2k+1)\frac{\pi}{2}$ |

Faustregel: „Je größer die Beschränkung, desto größer die 1. EF"

Ausnahme frei–frei, Grundschwingung ist Translation

# Erzwungene Balkenschwingungen

Gesucht ist die Amplitude des Mittelpunktes des gezeigten Balkens.




Schwierigkeit durch Anregung in der Mitte.
Nur durch Symmetrie auf die gezeigte Weise lösbar.

DGL: $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

## Ansatz nach Bernoulli

$$w(x,t) = \overline{W}(x) \cos \Omega t \qquad (1)$$

in DGL: $$-\Omega^2 \, \overline{W}(x) \cos \Omega t + \frac{EI}{\rho A} \overline{W}^{IV}(x) \cos \Omega t = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{W}^{IV}(x) - \underbrace{\Omega^2 \frac{\rho A}{EI}}_{\overline{\lambda}} \overline{W}(x) = 0 \qquad (2)$$

$$\overline{W}(x) = A \cos \overline{\lambda} x + B \sin \overline{\lambda} x + C \cosh \overline{\lambda} x + D \sinh \overline{\lambda} x$$

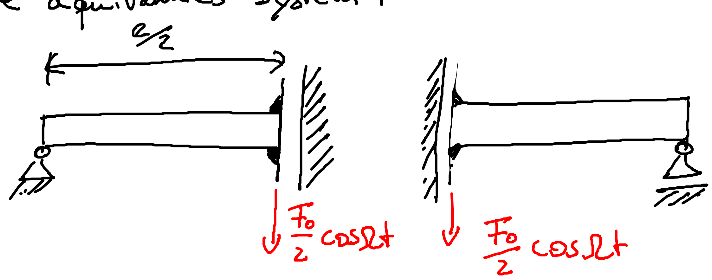
## Randbed.

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) = 0 \;&\Rightarrow\; \overline{W}(0) = 0 \;\Rightarrow\; A + C = 0 \\ M(0,t) = 0 \;&\Rightarrow\; \overline{W}''(0) = 0 \;\Rightarrow\; -A + C = 0 \end{aligned}\right\} A = C = 0$$

$w'(\frac{l}{2}, t) = 0$ Symmetrie!

$$\Rightarrow \overline{W}'(\tfrac{l}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; B \cos \overline{\lambda} \tfrac{l}{2} + D \cosh \overline{\lambda} \tfrac{l}{2} \qquad (3)$$

Betrachte äquivalentes System:




$$\Rightarrow Q(x = \tfrac{l}{2}) = -EI w'''(x = \tfrac{l}{2}) = \frac{F_0}{2} \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \; -B\cos\bar{\kappa}\frac{l}{2} + D\cosh\bar{\kappa}\frac{l}{2} = -\frac{F_0}{2\bar{\kappa}^3 EI} \quad (4)$$

$$-EI\,w'''\left(x=\frac{l}{2}\right) = -EI\,\bar{W}'''\left(\frac{l}{2}\right)\cos\Omega t = \frac{F_0}{2}\cos\Omega t$$

$$-EI\,\bar{\kappa}^3\left(-B\cos\bar{\kappa}\frac{l}{2} + D\cosh\bar{\kappa}\frac{l}{2}\right) = \frac{F_0}{2}\cos\Omega t$$

$(3)+(4)$: $$D = -\frac{F_0}{4\bar{\kappa}^3 EI\cosh\bar{\kappa}\frac{l}{2}}$$

$(3)-(4)$: $$B = \frac{F_0}{4\bar{\kappa}^3 EI\cos\bar{\kappa}\frac{l}{2}}$$

$$\Rightarrow \bar{W} = \frac{F_0}{4\bar{\kappa}^3 EI}\left\{\frac{\sin\bar{\kappa}x}{\cos\bar{\kappa}\frac{l}{2}} - \frac{\sinh\bar{\kappa}x}{\cosh\bar{\kappa}\frac{l}{2}}\right\}$$

$$\bar{W}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F_0}{4\bar{\kappa}^3 EI}\left\{\frac{\sin\bar{\kappa}\frac{l}{2}}{\cos\bar{\kappa}\frac{l}{2}} - \frac{\sinh\bar{\kappa}\frac{l}{2}}{\cosh\bar{\kappa}\frac{l}{2}}\right\}$$

Amplitude unendlich, wenn $\cos\bar{\kappa}\frac{l}{2} = 0$

$$\Rightarrow \bar{\kappa}\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}(2k-1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\bar{\kappa}l = \pi(2k-1) = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$$

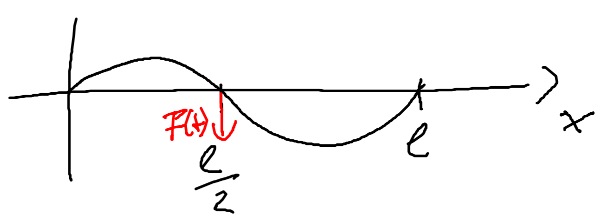
Eigenwerte bei dieser Lagerung (Tabelle) waren

$$\kappa_n l = n\pi$$

$\Rightarrow$ Amplitude ist unendlich, wenn wir mit den "ungraden" Eigenfrequenzen anregen!

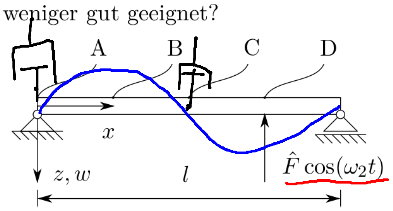
Warum nicht z.B. bei der 2. EF?

$$W_2(x) = \sin 2\pi\frac{x}{l}$$




Wir regen genau im Knoten der geraden Eigenform an.

3. Der skizzierte Balken wird wie gezeigt harmonisch mit seiner **zweiten** Eigenfrequenz $\omega_2$ über die Kraft $\hat{F}$ zu Biegeschwingungen angeregt. Durch Anbringen eines viskosen Dämpfers soll eine Schädigung des Balkens durch Resonanz verhindert werden. Welche der gekennzeichneten Stellen sind gut und welche weniger gut geeignet?



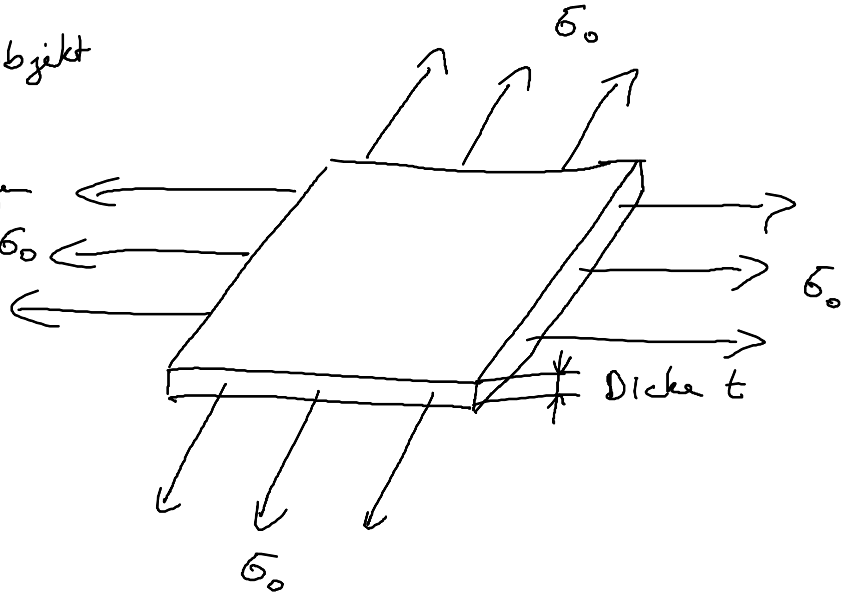

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| geeignet | ☐ | ☒ | ☐ | ☒ |
| ungeeignet | ☒ | ☐ | ☒ | ☐ |

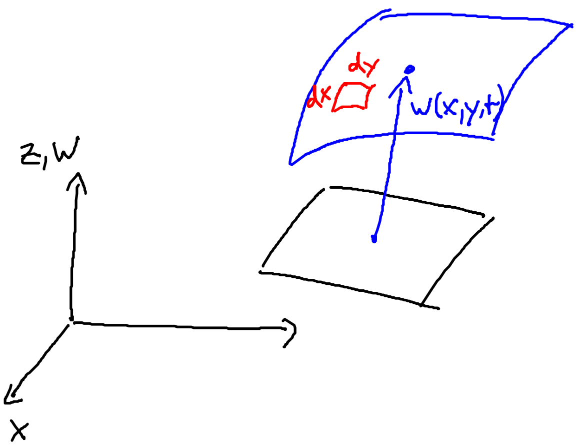
**Geg.:** $l$, $\hat{F}$, $\omega_2$, die Abstände zwischen den Punkten betragen je $\frac{l}{4}$

## 2D – Schwingungen: Bewegungsgleichung einer Membran

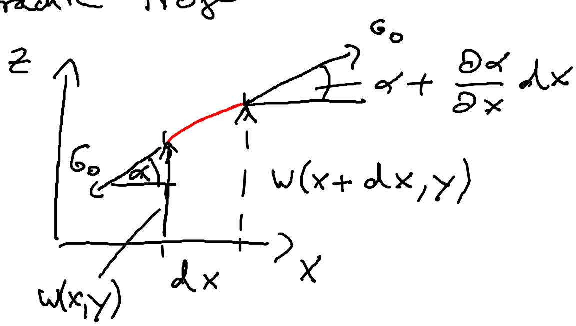
Analog zur Saite in 1D — Objekt ohne Biegesteifigkeit.

Wir betrachten eine in allen Richtungen gleich mit $\sigma_0$ gespannte Membran.

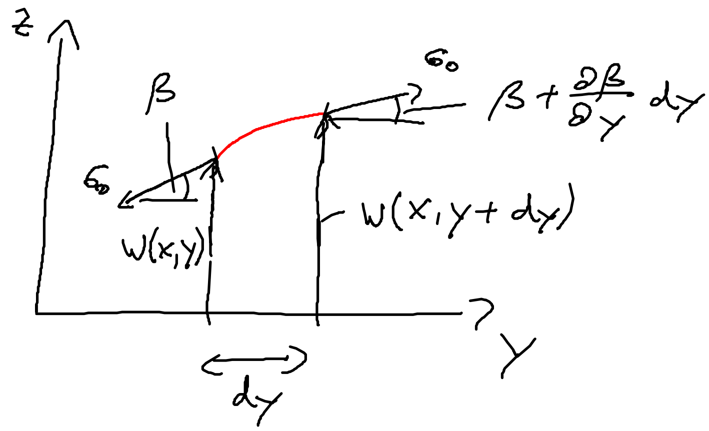



Betrachte Projektion x – z




Betrachte Projektion y – z




analog zur Saite:

$$\alpha \approx \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\alpha + d\alpha \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$$\beta \approx \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\beta + d\beta \approx \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy$$

Auf das Element wirkende Kraft ist Dicke Breite

$$dF_z = \left(\sigma_0 \sin\underbrace{(\alpha + d\alpha)}_{\approx \alpha + d\alpha} - \sigma_0 \sin\alpha\right) t\, dy + \left(\sigma_0 \sin(\beta + d\beta) - \sigma_0 \sin\beta\right) t\, dx$$

$$= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx\, dy\, t\, \sigma_0$$

## 2. Newtonsches Gesetz

$$dm\, \ddot{w} = dF_z$$

$$\rho t\, dx\, dy\, \ddot{w} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx\, dy\, t\, \sigma_0$$

$$\ddot{w} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}_{\Delta w} \underbrace{\frac{\sigma_0}{\rho}}_{c^2} = c^2 \Delta w$$

Laplace – Operator

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\ddot{w} = c^2 \Delta w}$$

Zweidimensionale Wellengleichung

## Lösung mit Bernoulli-Ansatz

$$w(x,y,t) = W(x,y)\, T(t)$$

Einsetzen in Wellengleichung

$$\Rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{\Delta W}{W} = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta W + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}}_{k^2} W = 0}$$

Helmholtz-Gleichung

Allg. wiederum mit Separationsansatz

$$W(x,y) = X(x)\, Y(y)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y} + k^2 X Y = 0 \qquad / : X Y$$

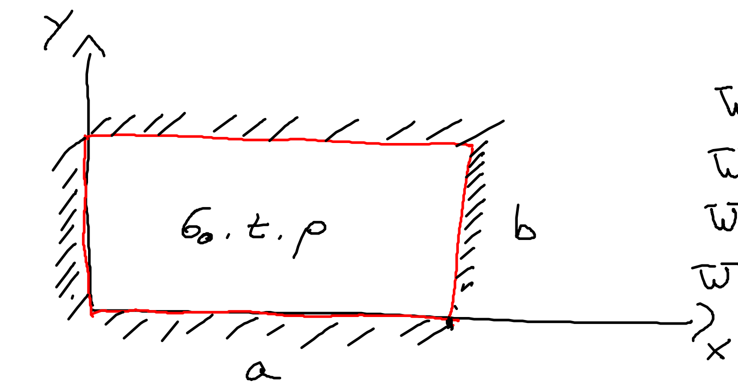
$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\Big/X = -\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\Big/Y - k^2 = -\alpha^2$$

$$\Rightarrow X'' + \alpha^2 X = 0 \quad \Rightarrow X = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

$$Y'' + \underbrace{(k^2-\alpha^2)}_{:=\beta^2} Y = 0 \quad \Rightarrow Y = C\cos\beta y + D\sin\beta y$$

mit $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$

Betrachte Rechteckmembran mit festen Rändern




<u>RB</u>

$W(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$W(a,y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0 \Rightarrow B\sin\alpha a = 0 \;(*)$

$W(x,0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$W(x,b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0 \Rightarrow D\sin\beta b = 0 \;(**)$

$(*) \Rightarrow \alpha_m = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 1, 2 \ldots$

$(**) \Rightarrow \beta_n = \frac{\pi n}{b}, \quad n = 1, 2, \ldots$

$$k_{mn} = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Die Eigenfreq. sind somit

$$\omega_{mn} = k_{mn}\, c = \pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Eigenformen:

$$W_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b}$$