Kontinuumsmechanik – 2. Übung

VL am 22.11. wieder im H0104 – sonst immer EB301!

Wiederholung: Transversalschwingungen von Saiten

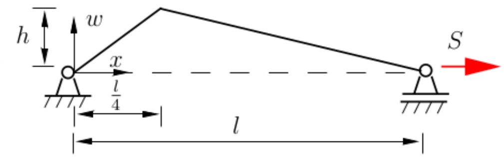
Wellengleichung: $\ddot{w} = c^2 w''$, $c^2 = \frac{N}{\mu}$ (1)

Lösbar durch Ansatz von d'Alembert: $w(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct)$

$\longrightarrow$ Im Allg. schwierige Erweiterung für alle Zeiten t erforderlich!

Thema heute: Ansatz von Bernoulli, Saitenschwingungen, Longitudinalschwingungen

4. Eine beidseitig eingespannte Saite der Länge l (Dichte ρ, Querschnittsfläche A) ist um die Kraft S vorgespannt. Nach Einleitung der folgenden Anfangsbedingungen führt sie freie, ungedämpfte, rein transversale Schwingungen aus:



$$\dot{w}(x, t=0) = 0$$

$$w(x,t=0) = \begin{cases} 4\frac{h}{l}x & \text{für } 0 \le x < \frac{l}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1-\frac{x}{l}\right)h & \text{für } \frac{l}{4} \le x \le l \end{cases}$$

Geg.: ρ, A, S, l, h

(a) Bestimmen Sie die D'ALEMBERTsche Lösung der Wellengleichung, und zeichnen Sie die Auslenkungen der Saite zu den Zeitpunkten: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, ... über eine volle Periode T.

letzte Woche

(b) Lösen Sie die Wellengleichung mit Hilfe des Produktansatzes von Bernoulli. Passen Sie die Lösung an die Rand- und Anfangsbedingungen an.

(c) Zeichnen Sie die ersten vier Eigenschwingungsformen und die Auslenkung der Saite aus der gewichteten Überlagerung dieser vier Eigenformen für den Zeitpunkt $t = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung nach BERNOULLI die Fourierdarstellung der D'ALEMBERTschen Lösung ist.

4b) Separationsansatz von Bernoulli:

$$w(x,t) = T(t)\,V(x) \qquad (2)$$

in (1): $\ddot{T}(t)\,V(x) = c^2 V''(x)\,T(t)$

$$\underbrace{\frac{\ddot{T}}{T}}_{f(t)} = \underbrace{c^2 \frac{V''}{V}}_{f(x)} = \text{const.} = -\omega^2$$

$\Rightarrow \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \qquad (3)$

allg. Lösung

$T(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$V'' + \frac{\omega^2}{c^2} V = 0 \qquad (4)$

$V(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x$

A, B, a, b sind Konstanten und müssen durch RBn und ABn bestimmt werden!

RB

$w(0,t) = 0 \Rightarrow V(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$w(l,t) = 0 \Rightarrow V(l) = 0 \Rightarrow B\sin\frac{\omega}{c}l = 0$

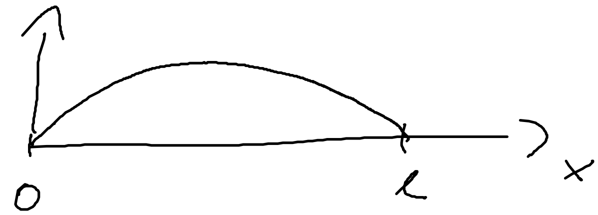
$\Rightarrow \frac{\omega}{c}l = n\pi$, mit $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{l}}$

Eigenkreisfrequenz

$$\Rightarrow V_n(x) = \underbrace{B_n \sin \frac{n\pi}{l} x}_{\text{Eigenform}}$$

1. Eigenform

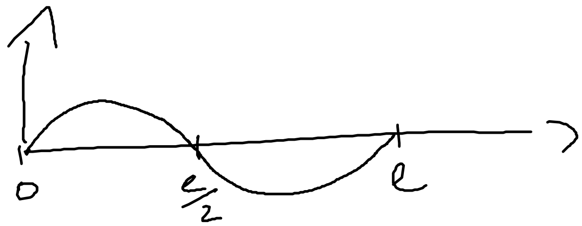
$$n = 1, \quad \omega_1 = \frac{\pi c}{l}$$



„Grundschwingung"

2. Eigenform

$$n = 2, \quad \omega_2 = \frac{2\pi c}{l}$$



„1. Oberschwingung"

Allgemeine Lösung ist die Superposition der Eigenform

$$\Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{c\pi n}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{c\pi n}{l} t\right)\right]$$

Koeffizienten a_n und b_n werden durch Fourieranalyse bestimmt:

Anfangsbed.:

$$w(x,t=0) = w_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \qquad (6)$$

$$\dot{w}(x,t=0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{c\pi n}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \Rightarrow b_n = 0$$

Multiplikation von (6) mit $\sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und Integration:

$$\Rightarrow \int_0^l w_A(x) \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi k}{l} x \, dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n \\ l/2 & \text{für } k = n \end{cases}} \right)$$

| Orthogonalitäts-relation

Beweis der Ortho.-rel.

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \int_0^l \frac{1}{2} \left\{ \cos \pi \frac{x}{l}(n-k) - \cos \pi \frac{x}{l}(n+k) \right\} dx$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$= \frac{l}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{n-k} \sin \frac{\pi x}{l}(n-k)\right]_0^l - \left[\frac{1}{n+k} \sin \frac{\pi x}{l}(n+k)\right]_0^l \right\}$$

$$= \frac{\ell}{2\pi} \left\{ \underbrace{\frac{\sin(\pi(n-k))}{n-k}}_{=0 \text{ für } n \neq k} - \underbrace{\frac{\sin(\pi(n+k))}{n+k}}_{=0 \text{ für alle } n,k>0} \right\}$$

Fall $n=k$

$$\lim_{(n-k)\to 0} \frac{\ell}{2\pi} \frac{\sin(\pi(n-k))}{n-k} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{(n-k)\to 0} \frac{\ell}{2\pi} \frac{\pi \cos(\pi(n-k))}{1} = \frac{\ell}{2} //$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell w_A(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

$$\text{mit } w_A(x) = \begin{cases} 4\frac{h}{\ell} x, & 0 \le x \le \frac{\ell}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)h, & \frac{\ell}{4} < x \le \ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\ell} \left\{ \int_0^{\ell/4} 4\frac{h}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx + \int_{\ell/4}^{\ell} \frac{4}{3}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) h \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx \right\}$$

Einfach zu bestimmen durch part. Int. HA

$$a_n = \frac{8h}{3n^2\pi^2} \left[4\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin(n\pi) \right]$$

In Lösung

$$w(x,t) = \frac{8h}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[4\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin(n\pi) \right] \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos \frac{c\pi n}{\ell} t$$

Longitudinalschwingungen von Stäben

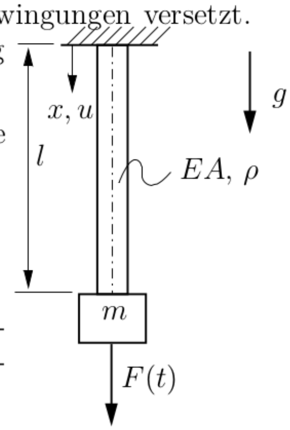
41. Ein einseitig eingespannter massebehafteter Stab (Dehnsteifigkeit EA, Dichte ρ, Länge l) im Schwerefeld trägt an seinem Ende eine Einzelmasse m. An dieser greift eine harmonische Erregerkraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an, die den Stab in erzwungene Longitudinalschwingungen versetzt.

(a) Leite die das System beschreibende partielle Differentialgleichung durch Freischnitt eines infinitesimalen Massenelementes her.

(b) Durch eine Transformation auf die statische Ruhelage läßt sich die Differentialgleichung auf die folgende bekannte Form überführen:

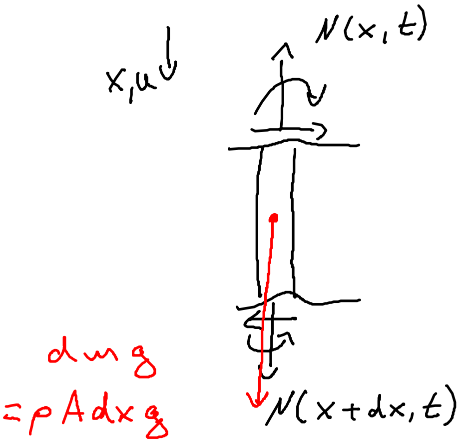
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,t) = c_l^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{mit} \quad c_l^2 = \frac{E}{\rho}$$

Ausgehend von dieser homogenen partiellen Differentialgleichung sollen die Längsschwingungen $\tilde{u}_p(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmt werden.



Geg.: F_0, Ω, E,A, ρ, l, m, g

a) Freischnitt



2. Newtonsche Gesetz

$$\rho A\,dx\,\ddot{u}(x,t) = N(x+dx,t) - N(x,t) + \rho A\,dx\,g$$

$$\rho A\,\ddot{u}(x,t) = N'(x,t) + \rho A g \quad (1)$$

Material-Struktur Gesetz (Mechanik I)

$$N(x,t) = EA\,u'(x,t) \quad (2)$$

(2) in (1) mit $EA = \text{const} \Rightarrow \rho A \ddot{u}(x,t) = EA\,u''(x,t) + \rho A g$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u}(x,t) = \frac{E}{\rho} u''(x,t) + g \quad (3)}$$

Inhomogene, partielle DGL

b) Trafo auf stat. Ruhelage

$$u(x,t) = \underbrace{u_0(x)}_{\text{stat. Ruhelage}} + \tilde{u}(x,t)$$

in (3):

$$\ddot{\tilde{u}}(x,t) = \frac{E}{\rho}\left(u_0''(x) + \tilde{u}''(x,t)\right) + g \quad (4)$$

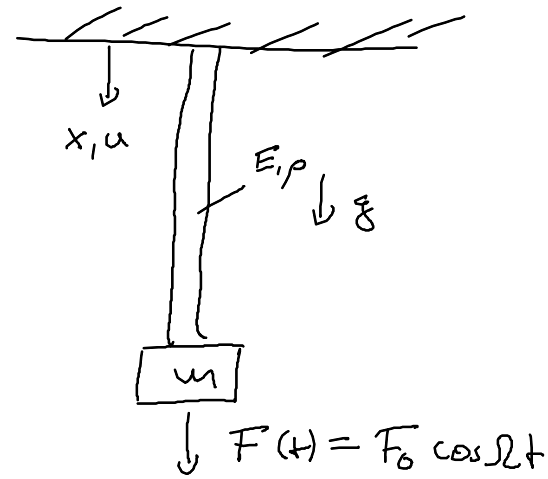
$u_0(x)$ ist stat. Ruhelage, falls $u_0''(x) = -\frac{\rho}{E} g \quad (5)$

$u_0(x)$ kann durch Integration und RB. bestimmt werden.

mit (4) und (5) folgt:

$$\boxed{\ddot{\tilde{u}}(x,t) = \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{c_L^2} \tilde{u}''(x,t)} \qquad (6)$$

Wellengleichung analog zur Saite



Erzwungene Schwingung hier: Inhomogenität in der Randbed. Lösung: $\tilde{u}(x,t) = u_h + u_p$

Eingeschwungener Zustand: Homogene Lösung verschwindet, $u_h(x,t) = 0$, System schwingt mit der Frequenz der Anregung Ω.

$$\tilde{u}_p(x,t) = V(x) \cdot T(t)$$
$$= V(x) \cdot \cos \Omega t$$

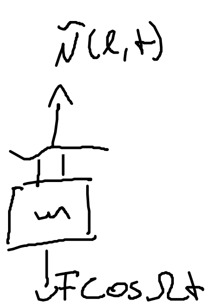
in (6): $\quad -\Omega^2 \cos \Omega t \, V = c_L^2 \, V'' \cos \Omega t$

$$\Rightarrow V'' + \frac{\Omega^2}{c_L^2} V = 0 \qquad \text{Lösung: } V(x) = A \cos \frac{\Omega}{c_L} x + B \sin \frac{\Omega}{c_L} x$$

Randbed.

$V(x=0,t) = 0 \Rightarrow A = 0$

$x = \ell$:



Achtung: Gewichtskraft taucht nicht auf. Wurde durch Trafo auf Ruhelage schon berücksichtigt. $\tilde{N}$ ist mod. Kraft!

2. N.G.

$$m \ddot{\tilde{u}}_p(\ell,t) = -\tilde{N}(\ell,t) + F_0 \cos \Omega t$$
$$= -EA \tilde{u}_p'(\ell,t) + F_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow -m\Omega^2 V(\ell) \underset{\cos\Omega t}{\vee} = -EA\, V'(\ell) \cos \Omega t + F_0 \cos \Omega t$$

$$-m\Omega^2 V(\ell) + EA\, V'(\ell) = F_0$$

$$\left(-m\Omega^2 \sin\frac{\Omega}{c_L}l + EA\ \frac{\Omega}{c_L}\cos\frac{\Omega}{c_L}l\right)B = F_0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c_L}\cos\frac{\Omega}{c_L}l - m\Omega^2\sin\frac{\Omega}{c_L}l}$$

$$\tilde{u}_p(x,t) = B\sin\frac{\Omega}{c_L}x\ \cos\Omega t$$

Fall, dass sich die Masse nicht bewegt

$$\hat{u}_p(l,t) = 0 = B\sin\underbrace{\frac{\Omega}{c_L}l}_{=n\pi}\ \cos\Omega t$$