1. Plenarübung — Kontinuumsmechanik

- Organisatorisches

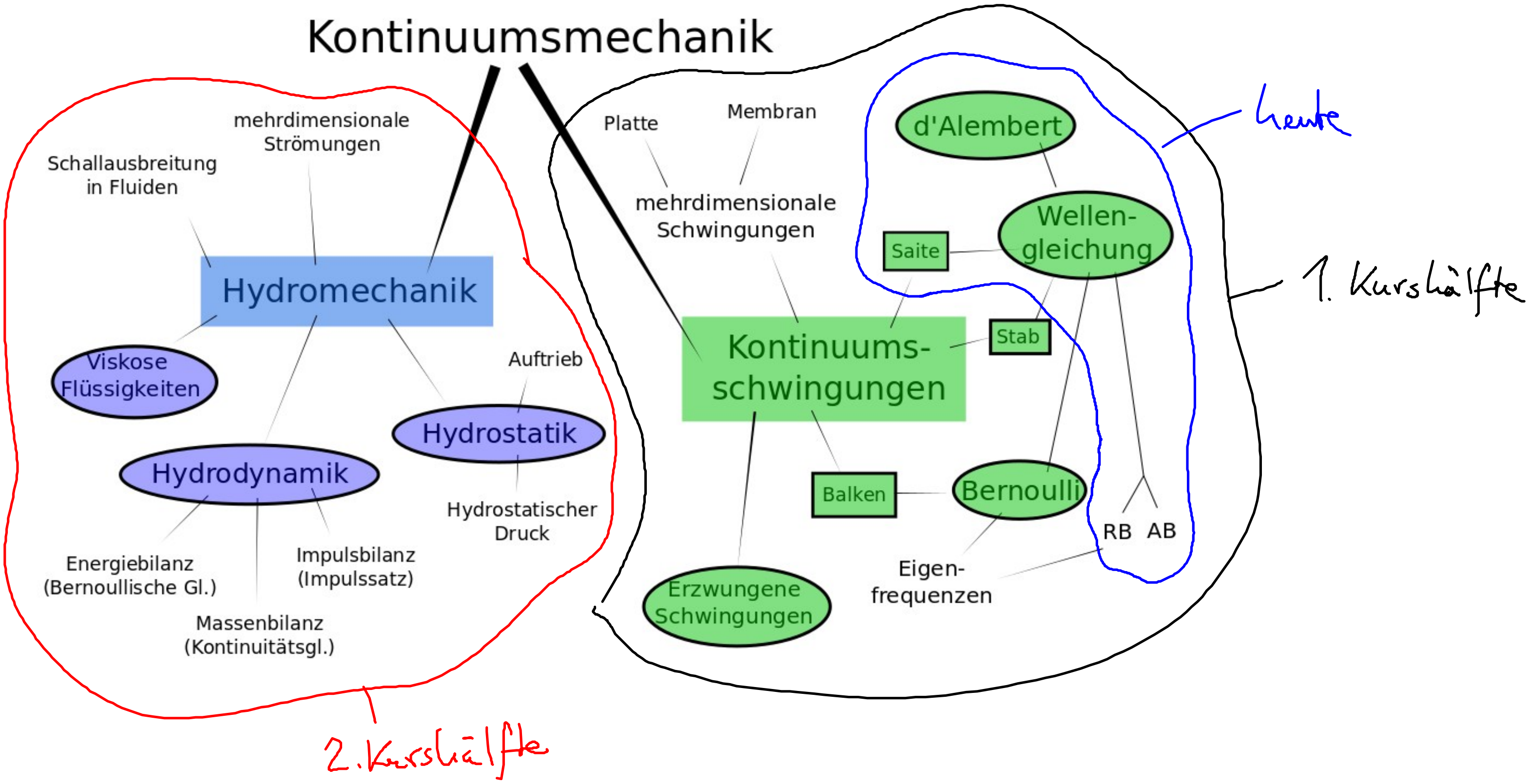
Alle Infos auf: reibungsphysik.tu-berlin.de

Begleitende Literatur: Skript, Technische Mechanik 4 (Gross, Hauger, Wriggers)

Kurzfragentest: 07.01.2020

schriftlicher Test: 18.02.2020

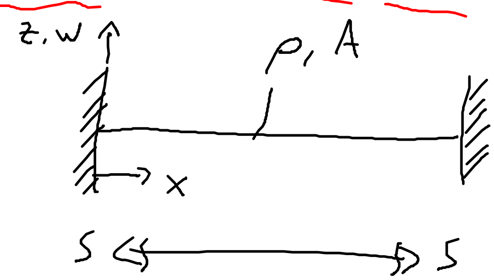
Anmeldezeitraum: 21.10.2019 – 30.11.2019



Thema: Wellengleichung, Saite, D'Alembert

Saite: Fadenförmiges Kontinuum ohne Biegesteifigkeit

Bekannt aus der Vorlesung



Wellengleichung: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (1)

S – Zugkraft in der Saite $\left[\frac{kg\,m}{s^2}\right]$

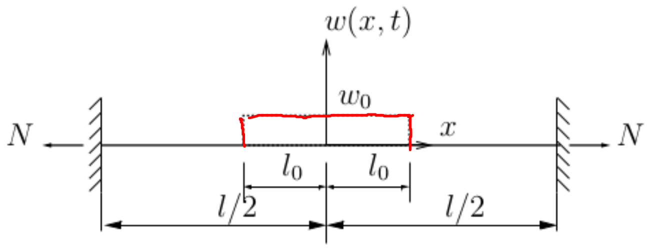
μ – Massenbelegung, $\mu = \rho A$ $\left[\frac{kg}{m}\right]$

c – Wellengeschwindigkeit, $c^2 = \frac{S}{\mu}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$

Ansatz von D'Alembert: $w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ (2)

Allgemeine Lösung für beliebige Funktionen f_1, f_2

6. Eine Saite der Länge l wird mit mit der Kraft N vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t=0$ wie dargestellt mit $w(x,t=0) = \begin{cases} w_0 & \text{für } -l_0 \le x \le l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ mit dem Ansatz nach D'ALEMBERT. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem.



Geg.: N, μ, l, $c^2 = \frac{N}{\mu}$, $w(x,t=0)$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

Anpassung von AvA (2) an die Anfangsbed.

Bestimme zunächst $\dot{w}(x,t)$:

$$\dot{w}(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f_1(x-ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2(x+ct)}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}}_{:=f_1'} \underbrace{\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}}_{=-c} + \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}}_{:=f_2'} \underbrace{\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}}_{c} = -c f_1'(x-ct) + c f_2'(x+ct)$$

1. AB: $\dot{w}(x,0) = 0 = \left[-c f_1'(x-ct) + c f_2'(x+ct)\right]\Big|_{t=0}$

$$\Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0$$

Integration über x: $\boxed{f_1(x) - f_2(x) = A \quad (3)}$

2. AB: $w(x,t=0) = \left\{ \begin{matrix} w_0, & -l_0 \le x \le l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{matrix} \right\} =: w_A(x)$

$$(2) \rightarrow \boxed{f_1(x) + f_2(x) = w_A(x) \quad (4)}$$

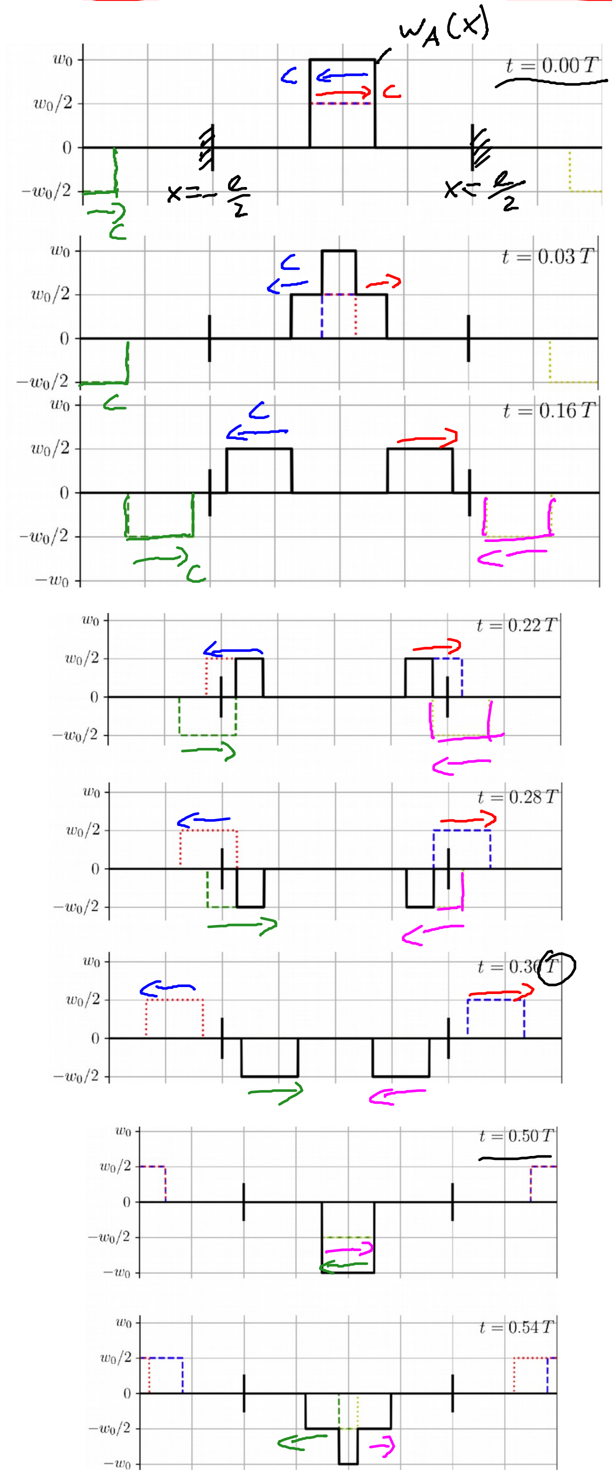
$\frac{(3)+(4)}{2}$: $f_1(x) = \frac{1}{2} w_A(x) + \frac{A}{2} \quad (5)$

$\frac{(4)-(3)}{2}$: $f_2(x) = \frac{1}{2} w_A(x) - \frac{A}{2} \quad (6)$

(5) und (6) in Ansatz (2): $w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct)\right]$

Einsetzen von $w_A(x)$:

$$w(x,t) = \underbrace{\begin{cases} \frac{1}{2} w_0, & -l_0 \le x - ct \le l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}_{f(x-ct)} + \underbrace{\begin{cases} \frac{1}{2} w_0, & -l_0 \le x + ct \le l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}_{f(x+ct)} \quad (7)$$



Lösung (7) ist nur gültig bis die Wellen die Ränder berühren!

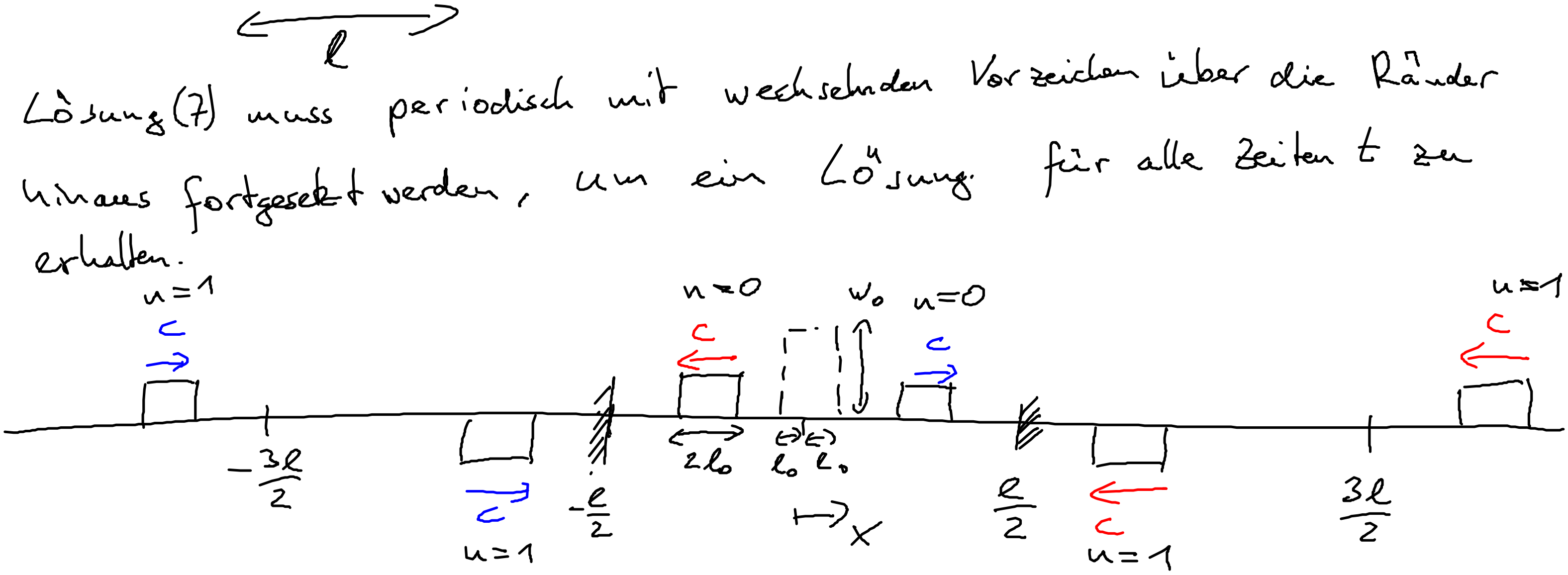
Feste Ränder, $w(-\frac{l}{2},t)=0$, $w(\frac{l}{2},t)=0$, werden berücksichtigt, indem wir eine formgleiche Welle mit umgekehrten Vorzeichen einlaufen lassen

Periodendauer

Zeit bis Anfangskonf. wieder erreicht wird.

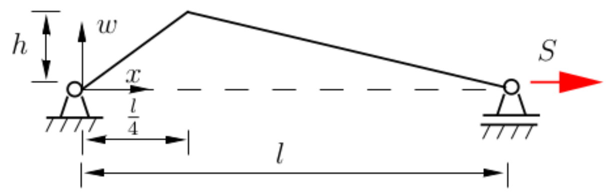
$$t = \frac{\overset{\text{zurückgelegte Strecke}}{x}}{\underset{\text{Wellengeschw.}}{c}} = \frac{2l}{c} =: T$$

Lösung (7) muss periodisch mit wechselnden Vorzeichen über die Ränder hinaus fortgesetzt werden, um ein Lösung für alle Zeiten t zu erhalten.



$$\Rightarrow w(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} w_0 & , -\ell_0 \le x \pm ct \mp 2n\ell \le \ell_0 \\ -\frac{1}{2} w_0 & , -\ell_0 \le x \pm ct \mp (2n+1)\ell \le \ell_0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

4. Eine beidseitig eingespannte Saite der Länge l (Dichte ρ, Querschnittsfläche A) ist um die Kraft S vorgespannt. Nach Einleitung der folgenden Anfangsbedingungen führt sie freie, ungedämpfte, rein transversale Schwingungen aus:



1.AB: $\dot{w}(x, t=0) = 0$

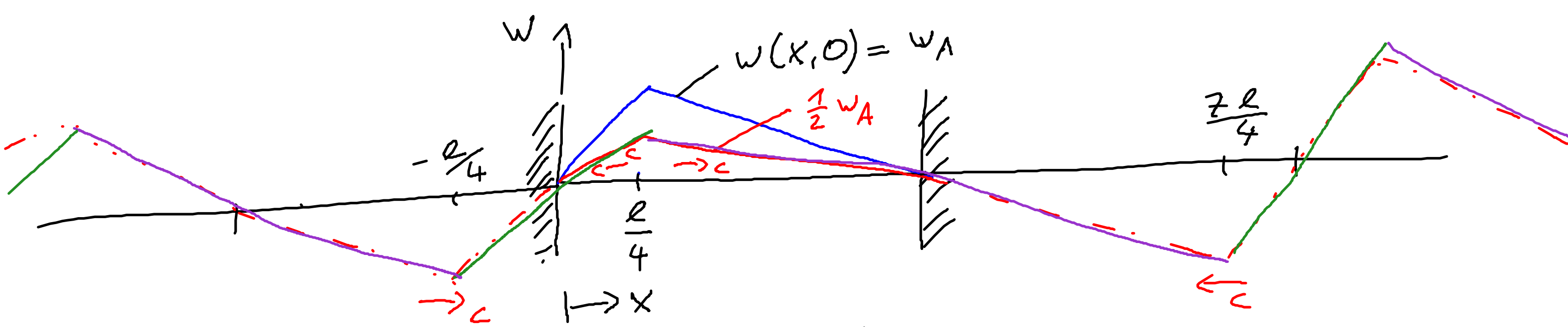
2.AB: $w(x, t=0) = \left.\begin{cases} 4\frac{h}{l}x & \text{für } 0 \le x < \frac{l}{4} \\ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{x}{l}\right)h & \text{für } \frac{l}{4} \le x \le l \end{cases}\right\} =: \boxed{w_A(x)}$

Geg.: ρ, A, S, l, h

(a) Bestimmen Sie die D'ALEMBERTsche Lösung der Wellengleichung, und zeichnen Sie die Auslenkungen der Saite zu den Zeitpunkten: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{8}T$, $t_2 = \frac{1}{4}T$, $t_3 = \frac{3}{8}T$, ... über eine volle Periode T.

Der einzige Unterschied zu Aufg. 6 ist die Anfangsauslenkung $w_A(x)$.
Lösung ohne Betrachtung der Ränder ist wieder:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct) \right] \quad (8)$$



Für $t > 0$ müssen Ränder direkt berücksichtigt werden.

Fortsetzung von (8) auf $\mathbb{R}$:

$$w(x,t) = \frac{2h}{3\ell} \left\{ \begin{array}{ll} 3(x \mp ct), & -\frac{\ell}{4} \leq x \mp ct \pm 2n\ell \leq \frac{\ell}{4} \\ \ell - (x \mp ct), & \frac{\ell}{4} \leq x \mp ct \pm 2n\ell \leq \frac{7\ell}{4} \end{array} \right\} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$