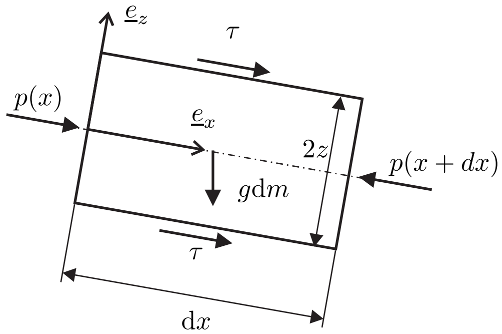
Tutorium

Aufgabe 81

(a) Freischnitt:



Aus Symmetriegründen sind die Schubspannungen am oberen und am unteren Rand identisch. Da die Strömung stationär ist, müssen die Kräfte in $\underline{e}_x$-Richtung im Gleichgewicht sein:

$$\begin{aligned} 0 &= 2zb\,(p(x) - p(x+dx)) + gdm \sin\alpha + 2\tau b dx \\ &= -z\,(p(x+dx) - p(x)) + \rho g z \sin\alpha dx + \tau dx \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{dp}{dx} z - \rho g z \sin\alpha. \tag{1}$$

Mit

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \tag{2}$$

folgt

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right) z \tag{3}$$

und nach Integration über z:

$$v(z) = \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{z^2}{2\eta} + c \tag{4}$$

Die Konstante c wird aus der Randbedingung

$$v(\pm h) = 0 \tag{5}$$

bestimmt:

$$\begin{aligned} v(h) = 0 &= \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta} + c \\ \Leftrightarrow c &= -\left(\frac{dp}{dx} - \rho g \sin\alpha\right)\frac{h^2}{2\eta}. \end{aligned} \tag{6}$$

Da die Geschwindigkeit gemäß Aufgabenstellung nicht von x abhängt, muss $\frac{dp}{dx}$ konstant bezüglich x sein und es gilt

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{l}, \quad \Delta p := p_2 - p_1. \tag{7}$$

Somit hat die Geschwindigkeit das Profil:

$$v(z) = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)(z^2 - h^2) \tag{8}$$

Die maximale Geschwindigkeit ist an der Stelle $z = 0$:

$$v_0 = v(z=0) = \frac{h^2}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \tag{9}$$

(b) Der Volumenstrom ist:

$$Q = \int_A v(z) dA = b\int_{-h}^{+h} v(z) dz \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &= 2\frac{b}{2\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)\int_0^{+h}(z^2 - h^2)dz \\ &= \frac{b}{\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)\left[\frac{1}{3}z^3 - h^2 z\right]_0^h \\ &= \frac{2bh^3}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

(c) Im Falle eines reibungsfreien Fluides wäre die notwendige Geschwindigkeit $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}. \tag{12}$$

Mit dem Volumenstrom aus Aufgabenteil (b) und der Querschnittsfläche $A = 2bh$ folgt

$$\bar{v} = \frac{h^2}{3\eta}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{\Delta p}{l}\right) \tag{13}$$

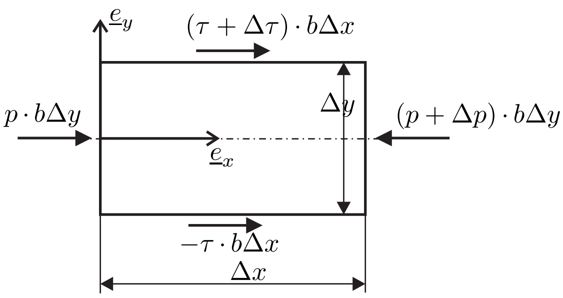
und durch den Vergleich mit Gleichung (9):

$$\bar{v} = \frac{2}{3} v_0. \tag{14}$$

Aufgabe 83

In der Aufgabe wird eine schleichende Strömung behandelt, d.h. die Trägheitsterme sind vernachlässigbar. ($m\ddot{x} = 0$ oder $\Theta\ddot{\varphi} = 0$)

(a) <u>1. Weg</u>
Freischnitt eines Masseelements



$$p\cdot\Delta y b - (p+\Delta p)\Delta y b + (\tau + \Delta\tau)\Delta x \cdot b - \tau b \Delta x = 0 \tag{15}$$

$$\Delta p \Delta y = \Delta\tau \Delta x \tag{16}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \tau}{\Delta y} \tag{17}$$

Grenzübergang:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}} \tag{18}$$

NEWTONsches Schubspannungsgesetz:

$$\tau = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y^2} \tag{20}$$

<u>2. Weg</u> NAVIER-STOKES-Gleichung:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho g \tag{21}$$

Da schleichende Strömung (s.o.) und keine Gewichtskräfte:

$$\operatorname{grad} p = \eta \Delta \underline{v} \tag{22}$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist eine Funktion von y, die Geschwindigkeit geht in $\underline{e}_x$-Richtung

$$\underline{v} = v(y)\underline{e}_x \tag{23}$$

Auswerten von (22) mit (23):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{24}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p = p(x) \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{26}$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 \tag{27}$$

Mit den Randbedingungen:

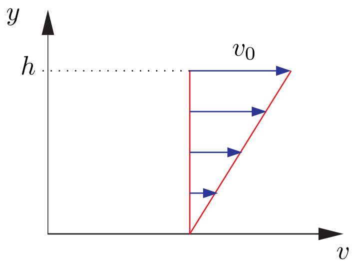
$$v(0) = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0 \tag{28}$$

$$v(h) = v_0 \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{v_0}{h} - \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} h \tag{29}$$

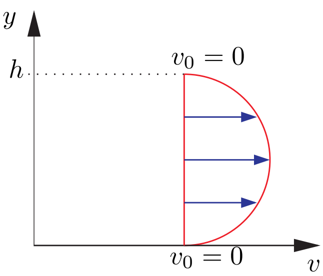
$$\Rightarrow v(y) = \frac{1}{2\eta} \cdot (y-h)y + \frac{v_0}{h} y \tag{30}$$

(b) Geschwindigkeitsverläufe

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$



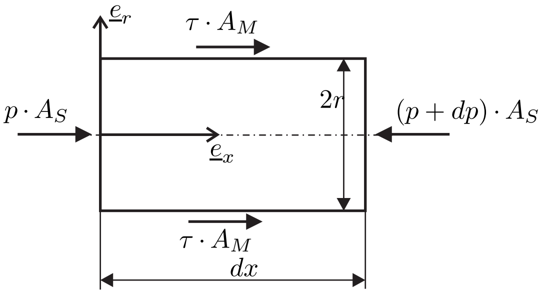
$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, $v_0 = 0$



Hausaufgaben

Aufgabe 82

Freischnitt eines Volumenelements (Zylinder)



<u>Annahmen:</u>
- schleichende Strömung $\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{t} = 0$
- Inkompressibilität
- Druck hängt nur von x ab $\Rightarrow p = p(x)$

(a)

$$m\ddot{x} = \sum F_x = 0 = \tau A_M + pA_S - (p+dp)A_S \tag{31}$$

$$\Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot x - dp\,\pi r^2 = 0 \tag{32}$$

NEWTONsches-Schubspannungsgesetz

$$\tau = \eta \frac{dv_x}{dr} \tag{33}$$

$$\tau 2\pi r\, dx = \pi r^2\, dp \tag{34}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \tag{35}$$

$$\Rightarrow \eta \frac{dv_x}{d_r} = \frac{r}{2}\frac{dp}{dx} \tag{36}$$

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx} \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

(b) <u>Randbedingung</u>
Haften am Rand

$$v_x(r = R) = 0 \tag{39}$$

(c) <u>Geschwindigkeitsprofil</u>

$$v_x = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} r^2 + C \tag{40}$$

$$0 = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} R^2 + C \tag{41}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta} R^2 \tag{42}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) \tag{43}$$

(d) Druckgradient $\frac{dp}{dx}$
Beachten der Bedingung $Q = \text{const.}$:

$$Q = \int_{(A)} v(r)\, dA \tag{44}$$

$$\text{mit } dA = 2\pi r\, dr \tag{45}$$

$$Q = \int_0^R \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) 2\pi r\, dr \tag{46}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{1}{4\eta}2\pi \int_0^R \left(r^3 - rR^2\right)\, dr \tag{47}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{\pi}{2\eta}\left[\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}R^2 r^2\right]_0^R \tag{48}$$

$$Q = \frac{dp}{dx}\frac{\pi}{2\eta}\left[\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4\right] \tag{49}$$

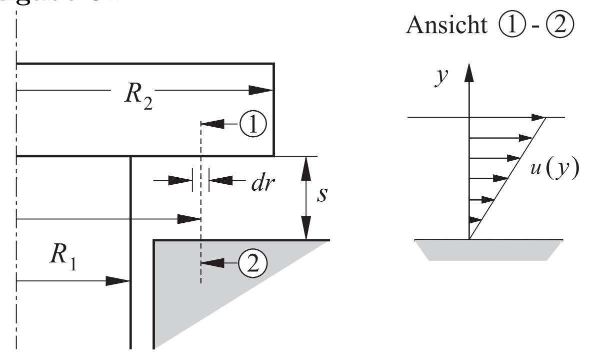
$$Q = -\frac{dp}{dx}\frac{\pi}{8\eta}R^4 \tag{50}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\eta Q}{\pi R^4} \tag{51}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = -\frac{2Q}{\pi R^4}\left(r^2 - R^2\right) \tag{52}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{2Q}{\pi R^2}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{53}$$

Aufgabe 84



(a) Für die Spannung $\tau(r)$ gilt nach dem Newtonschen Reibungsgesetz (Couette-Strömung ohne Druckgradient):

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{du}{dy} = \eta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta y} = \eta \cdot \frac{u_{\text{Welle}}(r)}{s} \tag{54}$$

mit

$$u_{\text{Welle}}(r) = r \cdot \omega \tag{55}$$

Damit folgt:

$$\tau(r) = \eta \cdot \frac{r \cdot \omega}{s} \tag{56}$$

(b) Für das Drehmoment dM des Kreisringes mit dem Radius r und der Breite dr gilt:

$$dM = \tau(r) \cdot r \cdot dA \tag{57}$$

Mit der Fläche des Kreisringes

$$dA = 2\pi \cdot r \cdot dr \tag{58}$$

und Gleichung (56) wird daraus

$$dM = \frac{2\pi\eta\omega}{s} r^3 dr\ . \tag{59}$$

(c) Das Gesamtdrehmoment ergibt sich daraus durch Integration:

$$M = \int_{R_1}^{R_2} dM \tag{60}$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \tag{61}$$

$$= \frac{2\pi \cdot \eta \cdot \omega}{s} \cdot \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right) \tag{62}$$

$$= \frac{\pi \cdot \eta \cdot \omega}{2s} \cdot \left(R_2^4 - R_1^4\right) \tag{63}$$

(d) Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$M = \frac{\pi \cdot 0{,}4\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 318{,}3\frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}}\left[(0{,}4\text{m})^4 - (0{,}2\text{m})^4\right]}{2 \cdot 0{,}0002\text{m}}$$

$$\approx 400\text{Nm}$$