Tutorium

Aufgabe 75

(a) Hydrostatik:

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) \tag{1}$$

am Behälterboden herrscht der Druck

$$p(z = h) = p_0 + 2\rho g h \tag{2}$$

(b) Radius des Abflussrohres zwischen B und C:

$$r(z) = R + \frac{R}{h} z \tag{3}$$

Querschnittsfläche zwischen B und C:

$$A(z) = \pi r(z)^2 = \pi (R + \frac{R}{h} z)^2 \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit an der Rohröffnung wird mit der Ausflussformel von Toricelli (alternativ: Bernoulli A-D) bestimmt:

$$v_\mathrm{D} = \sqrt{6gh} \tag{5}$$

und aus der Kontinuitätsgleichung folgt unmittelbar

$$v_\mathrm{C} = v_\mathrm{D} = \sqrt{6gh}. \tag{6}$$

Mit der Kontinuitätsgleichung kann nun die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C berechnet werden:

$$A(z)v(z) = A_\mathrm{C} v_\mathrm{C} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow v(z) = \frac{\pi R^2}{\pi \left(R + \frac{R}{h} z\right)^2} \sqrt{6gh}$$

$$v(z) = \frac{\sqrt{6gh}}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^2}. \tag{8}$$

(c) An der Rohröffnung ist der Druck in der Flüssigkeit gleich dem Außendruck und aus der Bernoulligleichung folgt mit (6):

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{D} = p_0. \tag{9}$$

Der Druck in einem beliebigen Punkt z zwischen B und C kann nun ebenfalls mit der Bernoulligleichung berechnet werden:

$$p(z) + \frac{\rho}{2} v(z)^2 + \rho g z = p_\mathrm{C} + \frac{\rho}{2} v_\mathrm{C}^2 + 0 \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow p(z) = p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2}(v_\mathrm{C}^2 - v(z)^2)$$

$$= p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2}\left[6gh - \frac{6gh}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4}\right]$$

$$p(z) = p_0 + \rho g(3h - z) - \frac{3\rho g h}{\left(1 + \frac{z}{h}\right)^4} \tag{11}$$

(d) Die Kraft auf die Wand wird mit dem Impulssatz berechnet. Dazu wird zunächst der Massenstrom bestimmt:

$$J_\mathrm{D} = \rho A_\mathrm{D} v_\mathrm{D} \tag{12}$$

$$= \pi \rho R^2 \sqrt{6gh} \tag{13}$$

Der Impulssatz liefert die Kraft auf die Flüssigkeit:

$$F_F = J_\mathrm{D}(v_\mathrm{E} - v_\mathrm{D}) \quad \text{mit } v_\mathrm{E} = 0$$

$$= -6\pi \rho g h R^2. \tag{14}$$

Die Kraft auf die Wand hat den gleichen Betrag, ist jedoch entgegen gesetzt gerichtet. Also übt der Wasserstrahl die Kraft

$$F = -F_F = 6\pi \rho g h R^2 \tag{15}$$

auf die Wand aus.

Aufgabe 73

(a) Bernoulli:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{16}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 \quad \Rightarrow |v_1| = |v_2| \tag{17}$$

(b) Impulssatz für einen Stromfaden:

$$\underline{F} = J(\underline{v_2} - \underline{v_1}), \quad J = \text{Massenstrom} \tag{18}$$

horizontale Komponente

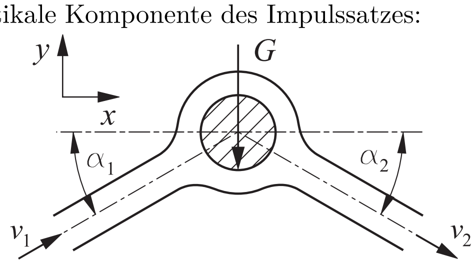
$$F_x = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \tag{19}$$

Annahme: keine Kraft in x-Richtung

$$0 = J(v_2 \cos\alpha_2 - v_1 \cos\alpha_1) \quad \Big| \; v_2 = v_1 \tag{20}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 \tag{21}$$

(c) vertikale Komponente des Impulssatzes:



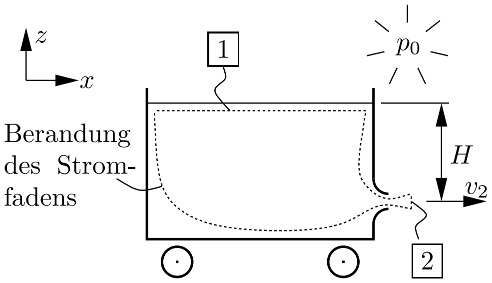
$$F_y = -G = J(-v_2 \sin\alpha - v_1 \sin\alpha) \tag{22}$$

mit $v_2 = v_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1$:

$$J = \frac{G}{2 v_1 \sin\alpha_1} \tag{23}$$

ist der erforderliche Massenstrom.

Aufgabe 77



Für den Stromfaden von $\boxed{1}$ nach $\boxed{2}$ gilt:

1. Kontinuitätsgleichung:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{24}$$

$$\hookrightarrow \text{wegen } A_1 \gg A_2 : \quad v_1 \ll v_2 \tag{25}$$

2. Bernoulli

$$\frac{p_0}{\rho} + g z_1 + 0 = \frac{p_0}{\rho} + g z_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \tag{26}$$

$$\hookrightarrow v_2 = \sqrt{2gH} \quad \text{(Torricelli)} \tag{27}$$

3. Impulssatz

$$\text{aus Vorlesung:} \quad \underline{F} = J(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \tag{28}$$

Massenstrom $J = \rho A_2 v_2$

$$\underline{v}_2 = v_2 \underline{e}_x, \quad \underline{v}_1 = 0 \tag{29}$$

$$\hookrightarrow \underline{F} = \rho A_2 v_2^2 \underline{e}_x \tag{30}$$

$\underline{F}$ ist die Kraft, die auf den Stromfaden wirkt. Vom Stromfaden auf den Wagen und dann vom Wagen auf die Feder wirkt die Gegenkraft $-\underline{F}$.

Hausaufgaben

Aufgabe 74

(a) Mit der Bernoulli-Gl. folgt für die Punkte 1 und 2 eines Stromfadens:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 \tag{31}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g(-h_1) = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \tag{32}$$

Da v_1 und v_2 unbekannt sind, benötigt man eine zweite Gleichung. Nach der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \tag{33}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \tag{34}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\left[\frac{1}{\rho}(p_1 - p_0) - g h_1\right]}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \tag{35}$$

(b) Mit der Bernoulli-Gl. folgt für die Punkte 2 und 3 eines Stromfadens mit $p_2 = p_3 = p_0$:

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + g z_3 \tag{36}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{v_3^2}{2} + g z \tag{37}$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{v_2^2 - 2gz} \tag{38}$$

(c) Die Strahlkraft $\underline{F}^S$ des Fluids auf den Kolben berechnet sich nach folgender Formel:

$$\underline{F}^S = \dot{m} \underline{v}_3 \tag{39}$$

$$\text{Konti: } \dot{m} = \rho v_2 A_2 \tag{40}$$

$$\Rightarrow \underline{F}^S = \rho v_2 A_2 \sqrt{v_2^2 - 2gz}\, \underline{e}_z \tag{41}$$

(d) In der Statischen Ruhelage z_s ist die Summe der äußeren Kräfte auf den Kolben gleich Null:

$$\underline{0} = \underline{F}^S + M\underline{g} \tag{42}$$

$$M g \underline{e}_z = \rho v_2 A_2 \sqrt{v_2^2 - 2g z_s}\, \underline{e}_z \tag{43}$$

$$\Rightarrow z_s = \frac{1}{2g}\left[v_2^2 - \left(\frac{Mg}{\rho A_2 v_2}\right)^2\right] \tag{44}$$
