Tutorium

Aufgabe 56

Die Formel für den hydrostatischen Druck lautet

$$p(y) = \rho_W g y \tag{1}$$

(a) Die Druckkraft des Wassers auf ein kleines Oberflächenelement dA ist

$$d\underline{F} = p(y)\, d\underline{A} \tag{2}$$

Für die x-Komponente der Druckkraft berücksichtigen wir von der Fläche $d\underline{A}$ nur die vertikale Projektion dA_y, die in die yz-Ebene liegt (und damit für die Kraft in x-Richtung verantwortlich ist).

$$dF_x = p(y)\, dA_y \tag{3}$$

Die Projektion dA_y setzt sich aus der Breite des Damms b in z-Richtung und einer kleinen Strecke dy in y-Richtung zusammen:

$$dA_y = b\, dy \tag{4}$$

(1) und (4) eingesetzt in (3) ergibt:

$$dF_x = \rho_W g b y\, dy \tag{5}$$

Die gesamte Kraft erhalten wir durch bestimmtest Integrieren. Dabei läuft y zwischen 0 (Wasseroberfläche) und R (Grund).

$$F_x = \int_0^R \rho_W g b y\, dy \tag{6}$$

$$F_x = \frac{1}{2}\rho_W g b R^2 \tag{7}$$

(b) Auch für die Vertikalkraft des Wassers F_y betrachten wir den Druck auf eine Projektion der Fläche dA, diesmal natürlich die Projektion dA_x in der xz-Ebene.

$$dF_y = p(y)\, dA_x \tag{8}$$

Auch hier hat die Fläche dA_x wieder die Tiefe b und die Breite dx.

$$dA_x = b\, dx \tag{9}$$

(1) und (9) eingesetzt in (8) ergibt:

$$dF_y = \rho_W g b y(x)\, dx \tag{10}$$

$$F_y = \int_0^R \rho_W g b y(x)\, dx \tag{11}$$

Da y den Abstand von der Wasseroberfläche zur Schleuse angibt und offensichtlich von der Position x abhängt können wir leider nicht so einfach integrieren wie noch bei Gleichung (5). Bei Betrachtung der Funktion (ohne Herleitung)

$$y(x) = R - \sqrt{R^2 - (R-x)^2} \tag{12}$$

fällt bereits auf, dass die Lösung dieses Integrals nicht unbedingt trivial ist (aber natürlich dennoch eine gute Übung, Tipp: Substitution). Mit ein wenig Umformen und Grundkenntnissen der Analysis lässt sich dieser Rechenaufwand aber umgehen. Dazu ziehen wir zunächst die konstanten Faktoren $\rho_W g b$ vor das Integral. Zu lösen bleibt also

$$\int_0^R y(x)\, dx \tag{13}$$

Aus Analysis ist bekannt, dass das Ergebnis dieses Integrals nichts anderes als der Flächeninhalt zwischen der Funktion $y(x)$ und der $x-$Achse ist. In unserem Fall also die Fläche des Wassers über der Schleuse. Diese bestimmen wir einfach, indem wir von dem Quadrat mit Seitenlänge $h_0 = R$ den Viertelkreis der Schleuse abziehen. Der Viertelkreis mit Radius R hat natürlich die Fläche $\frac{1}{4}\pi R^2$. Das Ergebnis entspricht genau dem des gesuchten Integrals.

$$\int_0^R y(x)\, dx = R^2 - \frac{\pi}{4}R^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) R^2 \tag{14}$$

Eingesetzt in (11) ergibt das die Lösung:

$$F_y = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \rho_W g b R^2 \tag{15}$$

Das selbe Ergebnis erhält man natürlich auch, wenn man das Integral rechnerisch löst. [1]

(c) Bisher haben wir lediglich die Druckkraft des Wasser berücksichtig, natürlich drückt aber zusätzlich noch das Eigengewicht die Sperre nach unten. Die Querschnittsfläche der Sperre haben wir bereits mit $\frac{1}{4}\pi R^2$ bestimmt. Mit der Tiefe b und der Dichte $\rho_S = 3\rho_W$ ergibt sich die Masse und damit die Gewichtskraft G (die natürlich in positive $y-$Richtung wirkt)

$$G = \underbrace{\frac{\pi}{4}R^2 b \rho_S}_{\text{Masse}}\, g = \frac{3\pi}{4} R^2 b \rho_W g \tag{16}$$

Die Haftbedingung lautet allgemein

$$H \leq \mu_0 N \tag{17}$$

[1] Eine vielleicht noch leichtere Möglichkeit für die Bestimmung der Vertikalkraft findet sich in den Vorlesungsnotizen im Kapitel "Der schwimmende Körper"

> Die vertikale Komponente der Kraft ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeit, welche sich oberhalb der Fläche befindet

Das entspricht im wesentlichen unserem Rechenweg mit $\rho_W b R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ als Masse und der Erdbeschleunigung g.

Das statische Kräftegleichgewicht in $x-$Richtung liefert sofort

$$\begin{aligned} H &= F_x \\ H &= \frac{1}{2}\rho_W gbR^2 \end{aligned} \tag{18}$$

Die Normalkraft N erhalten wir aus dem Kräftgleichgewicht in $y-$Richtung

$$\begin{aligned} N &= F_y + G \\ &= \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2 + \frac{3\pi}{4}R^2 b\rho_W g \\ N &= \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\rho_W gbR^2 \end{aligned} \tag{19}$$

Gerade noch Haften ist im Grenzfall für $H = \mu_0 N$, dann gilt für μ_0

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{H}{N} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\rho_W gbR^2}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\rho_W gbR^2} \\ \mu_0 &= \frac{1}{2+\pi} \end{aligned} \tag{20}$$

(d) Die $x-$ und $y-$Komponenten der Wasserlast wurden bereits am Anfang dieser Aufgabe bestimmt. Die Resultierende Kraft können wir als Vektor darstellen

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \\ \underline{F} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho_W gbR^2 \\ \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

Den Neigungswinkel α (von der $y-$Achse math. positiv) können wir über den Tangens bestimmmen.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{F_x}{F_y} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{F_x}{F_y}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\rho_W gbR^2}{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2}\right) \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{1}{2-\frac{\pi}{2}}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

Die rechnerische Bestimmung eines Punktes auf der Wirkungslinie ist leider nicht so einfach, lässt sich aber wiederum umgehen. Jede kleine Druckkraft $d\underline{F}$ steht immer senkrecht auf der Oberfläche $d\underline{A}$. Zudem geht eine Senkrechte auf der Oberfläche des Viertelzylinders immer auch durch die Ecke, um die der Kreisbogen aufgespannt wird, also quasi den Mittelpunkt des gedachten Vollkreises. Da sie alle durch den selben Punkt gehen, bilden diese vielen Kräfte $d\underline{F}$ eine zentrale Kräftegruppe (vgl. Statik/Mechanik I). Die Resultierende dieser Kräfte (und nichts anderes ist $\underline{F}$) ist wiederum eine Kraft deren Wirkungslinie durch den selben Punkt verläuft. Damit ist ein Punkt auf der Wirkungslinie also der Ursprung des Radius.

$$\underline{r}_F = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \tag{23}$$

Aufgabe 63

Bei stationären Strömungen gilt entlang eines Stromfadens:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konst.} \tag{Bernoulli}$$

(a) Die Austrittsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 bestimmen wir mit (Bernoulli) vom Kessel zum jeweiligen Abfluss. Wir nehmen dabei an, der Kessel (k) ist groß genug, um die Fließgeschwindigkeit in ihm vernachlässigen zu können. ($v_k = 0$)
Es ergibt sich für den Stromfaden $(k) \to (1)$

$$\frac{p_k}{\rho} + \frac{v_k^2}{2} + gH = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 \tag{24}$$

mit $p_k = p_i = 6p_0$, $v_k = 0$ und $p_1 = p_0$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H-h_1) \tag{26}$$

Analoges Vorgehen für $(k) \to (2)$ und $(k) \to (3)$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g(h_1+h_2) \tag{27}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H-h_1-h_2) \tag{28}$$

$$\frac{6p_0}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} + g(h_1+h_2+h_3) \tag{29}$$

$$\Rightarrow \frac{v_3^2}{2} = \frac{5p_0}{\rho} + g(H-h_1-h_2-h_3) \tag{30}$$

Umformen von (26),(28) und (30) nach den Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H-h_1)} \tag{31}$$

$$v_2 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H-h_1-h_2)} \tag{32}$$

$$v_3 = \sqrt{10\frac{p_0}{\rho} + 2g(H-h_1-h_2-h_3)} \tag{33}$$

(b) Der Massenstrom $\dot{M} = \rho A v$ soll aus allen Ausflüssen gleich groß sein. Vergleicht man die Austritte 1 und 2 unter Berücksichtigung der Querschnitte F_1 und F_2 sowie der soeben ermittelten Fließgeschwindigkeiten v_1 und v_2, ergibt sich (für $\rho = $ konst.):

$$\rho F_1 v_1 \stackrel{!}{=} \rho F_2 v_2 \tag{34}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = F_1 \frac{v_1}{v_2}} \tag{35}$$

Und genauso für F_3:

$$\rho F_1 v_1 \stackrel{!}{=} \rho F_3 v_3 \tag{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_3 = F_1 \frac{v_1}{v_3}} \tag{37}$$

Aus (31),(32) & (33) ist zu erkennen, dass $v_3 < v_2 < v_1$, also müssen die Austrittsflächen größer werden, je höher man wohnt, um denselben Massenstrom $\dot{M}$ zu erreichen: $F_3 > F_2 > F_1$.

(c) Je höher wir wohnen, desto langsamer tritt also das Wasser aus. Im Grenzfall liegt der Austritt so hoch, dass das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0 austritt. Wenn wir diese Information in (Bernoulli) berücksichtigen und einen Stromfaden $(k) \to (z_{max})$ betrachten, ergibt sich:

$$\frac{p_k}{\rho} + \frac{v_k^2}{2} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + g z_{max} \tag{38}$$

$$5\frac{p_0}{\rho} + gH = g z_{max} \tag{39}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{max} = 5\frac{p_0}{g\rho} + H} \tag{40}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 59

(a) Hinweis: Die Definition für die jeweilige Auftriebskraft F_A ist zu beachten.

$$\begin{aligned} F_A &= \rho g \frac{V_{Zyl}}{2} \\ &= \rho g \frac{1}{2}\left[\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 b\right] \\ &= \frac{1}{8}\rho g \pi d^2 b \end{aligned} \tag{41}$$

(b) Der Druckverlauf ist durch die Grundgleichung der Hydrostatik für inkompressible Fluide bestimmt. Dabei ist zu beachten, wie die Koordinate z eingeführt wird (Vorzeichen und Ursprung). F_K ist die Kraft die von innen auf Grund des Wassers auf die Klappe wirkt.

$$p(z) = p_0 + \rho g s + \rho g z \quad (0 \le z \le h) \tag{42}$$

$$\begin{aligned} F_K &= \int_0^h p(z) b dz \\ &= b \int_0^h \left[(p_0 + \rho g s) + \rho g z\right] dz \\ \Rightarrow F_K &= b\left[(p_0 + \rho g s)\, h + \frac{1}{2}\rho g h^2\right] \end{aligned} \tag{43}$$

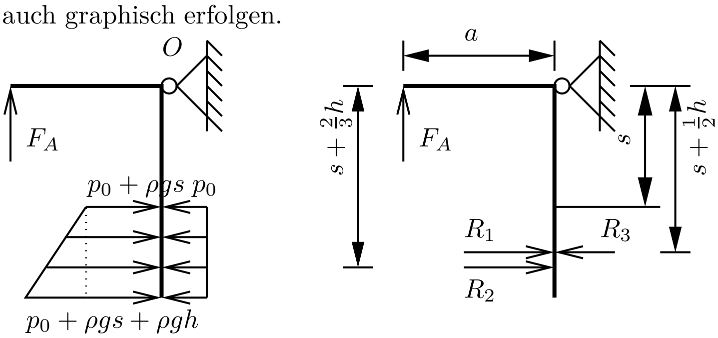
(c) Die notwendige Hebelarmlänge a kann aus einem Momentengleichgewicht um O berechnet werden.

$$\begin{aligned} \sum M^O \stackrel{!}{=} 0 &= aF_A - \int_0^h \left[p(z) - p_0\right](s+z)\, b dz \\ \Rightarrow aF_A &= b\int_0^h \rho g\,(s+z)^2\, dz \\ &= b\rho g \int_0^h \left[s^2 + 2sz + z^2\right] dz \\ &= b\rho g\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right] \end{aligned} \tag{44}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right]}{\pi d^2}} \tag{45}$$

Alternativ:

Die Berechnungen der Kräfte und der Momente kann auch graphisch erfolgen.



$$R_1^{Rechteck} = (p_0 + \rho g s) bh \tag{46}$$

$$R_2^{Dreieck} = \frac{1}{2}(\rho g h) bh \tag{47}$$

$$R_3^{Rechteck} = p_0 bh \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \sum M^O \stackrel{!}{=} 0 &= aF_A - \left(s + \frac{h}{2}\right)(R_1 - R_3) - \left(s + \frac{2}{3}h\right) R_2 \\ \Rightarrow aF_A &= (\rho g s) bh \left(s + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}(\rho g h) bh \left(s + \frac{2}{3}h\right) \end{aligned} \tag{49}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right]}{\pi d^2}} \tag{50}$$

Aufgabe 62

(a) BERNOULLIgleichung von $0 \to 1$

$$\frac{p_K}{\rho} + \overbrace{\frac{v_0^2}{2}}^{=0} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh \tag{51}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2\frac{p_K - p_0}{\rho} + 2g(H-h)} \tag{52}$$

$$v_1 = \sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho} + 2g(H-h)} \tag{53}$$

Da alle Brausköpfe auf gleicher Höhe hängen, berechnet man die Geschwindigkeiten v_2, v_3 und v_4 analog zu (53).

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 =: v \tag{54}$$

(b) Der gesamte Volumenstrom $\dot{V}$ setzt sich aus den Strömen der einzelnen Brausköpfe zusammen. Mit (54) ergibt sich

$$\dot{V} = v_1 A_D + v_2 A_D + v_3 A_D + v_4 A_D$$

$$\dot{V} = 4vA_D \tag{55}$$

Einsetzen von (53) und Umformen nach $\triangle p$

$$\dot{V} = 4\sqrt{2\frac{\triangle p}{\rho} + 2g(H-h)}A_D \tag{56}$$

$$\left(\frac{\dot{V}}{4A_D}\right)^2 = 2\frac{\triangle p}{\rho} + 2g(H-h) \tag{57}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{V}}{4A_D}\right)^2 = \frac{\triangle p}{\rho} + g(H-h) \tag{58}$$

$$\triangle p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\dot{V}}{4A_D}\right)^2 - \rho g(H-h) \tag{59}$$

(c) Bei konstantem Volumenstrom $\dot{V}$ gilt mit der neuen Austrittsgeschwindigkeit $v_{c)}$ bei nur zwei Brausköpfen:

$$\dot{V} = 2v_{c)}A_D \overset{!}{=} 4v_{a)}A_D = \text{const.} \tag{60}$$

$$\Rightarrow v_{c)} = 2v_{a)} \tag{61}$$

Gleichung (51) gilt natürlich weiterhin. Jetzt setzt man $v_1 = v_{c)} = \frac{\dot{V}}{2A_D}$ ein und stellt nach $\triangle p$ um.

$$\frac{p_K}{\rho} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_{c)}^2}{2} + gh \tag{62}$$

$$\frac{p_K - p_0}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{V}}{2A_D}\right)^2 - g(H-h) \tag{63}$$

$$\triangle p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\dot{V}}{2A_D}\right)^2 - \rho g(H-h) \tag{64}$$

Also verdoppelt sich die Austrittsgeschwindigkeit und der Druck im Kessel muss sich erhöhen, damit der Volumenstrom gleich bleibt.