# Tutorium

## Aufgabe 28

**(a)** Bewegungsdifferentialgleichung mit zugehörigen Randbedingungen

Bewegungsdifferentialgleichung

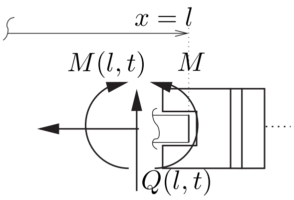
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{1}$$

Randbedingungen

$$w(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$M(0,t) = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{(0,t)} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{(l,t)} = 0 \tag{4}$$




Schwerpunktsatz in positive $w$-Richtung:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{(l,t)} = -Q(l,t) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{(l,t)} \tag{5}$$

Produktansatz

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{6}$$

Einsetzen in Gl. (1) mit den Abkürzungen

$$c_B := \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{und} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}} \tag{7}$$

ergibt

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -c_B^2\frac{X''''}{X} = -\omega^2 \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{9}$$

$$\Longrightarrow X'''' - \lambda^4 X = 0 \tag{10}$$

allgemeine Lösung von Gl. (10) mit den Unbekannten $\beta_1, \ldots, \beta_4; \lambda(\omega)$:

$$X(x) = \beta_1 \cosh\lambda x + \beta_2 \sinh\lambda x ... \tag{11}$$

$$... + \beta_3 \cos\lambda x + \beta_4 \sin\lambda x \tag{12}$$

Randbedingungen

$(2) \to 0 = X(0)$
$(3) \to 0 = X''(0)$
$(4) \to 0 = X'(l)$
$(5) \to 0 = m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) \quad$ (wg. (9))!

**(b)** Frequenzgleichung

$$\begin{aligned} X(0) = X''(0) = 0 &\Rightarrow \beta_1 = \beta_3 = 0 \\ X'(l) &= 0 \\ \Rightarrow \beta_2 \cosh\lambda l + \beta_4 \cos\lambda l &= 0 \\ m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) &= 0 \\ \Rightarrow (m\omega^2 \sinh\lambda l + EI\lambda^3\cosh\lambda l)\beta_2 ... \\ ... + (m\omega^2 \sin\lambda l - EI\lambda^3 \cos\lambda l)\beta_4 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Abkürzungen für die trig. und hyperb. Funktionen ist die notw. Bedingung für nichttriviale Lösungen ($\beta_2, \beta_4 \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}_{\lambda l} & \mathrm{c}_{\lambda l} \\ m\omega^2\mathrm{sh}_{\lambda l} + EI\lambda^3\mathrm{ch}_{\lambda l} & m\omega^2\mathrm{s}_{\lambda l} - EI\lambda^3\mathrm{c}_{\lambda l} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow m\omega^2(\tanh\lambda l - \tan\lambda l) + 2EI\lambda^3 = 0$$

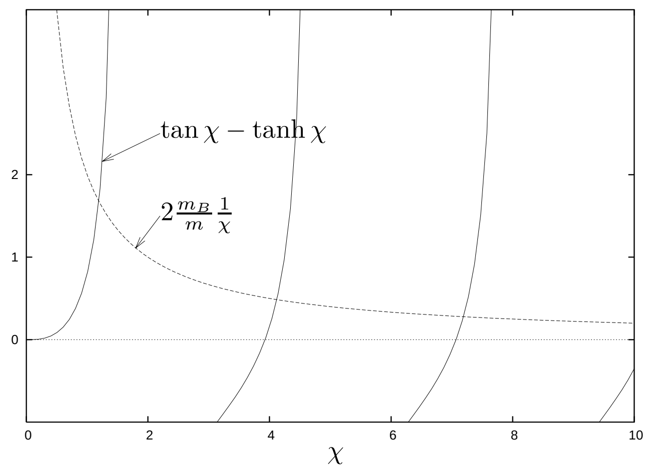
$$\text{mit} \quad \chi := \lambda l; \quad m_B := \mu l \quad \text{folgt:}$$

$$\boxed{\tan\chi - \tanh\chi = 2\frac{m_B}{m}\frac{1}{\chi}}$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung. Beachte dabei die Definition von $\lambda$ in Gl. (7).

Grafische Lösung:

Manchmal kann man eine grafische Lösung gewinnen, indem man die linke und die rechte Seite der Frequenzgleichung geeignet aufträgt und Schnittpunkte sucht. Hier ist das geschehen für das Massenverhältnis $\frac{m_B}{m} = 1$:

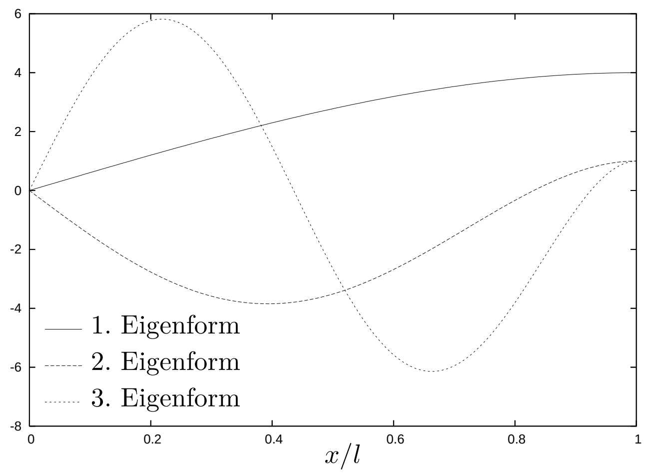



Eigenformen

Die Eigenformen genügen der folgenden Gleichung:

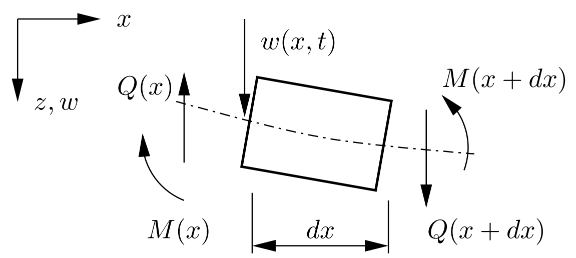
$$X(x) = \beta_2\left(\sinh\lambda x - \frac{\cosh\lambda l}{\cos\lambda l}\sin\lambda x\right) \tag{13}$$

Die ersten drei Eigenformen:




**Aufgabe 44**

**(a)**




Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx) - Q(x) \tag{14}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $\frac{Q(x+dx)-Q(x)}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ergibt sich

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{15}$$

Wegen $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ (Drehträgheit des infitesimalen Balkenelements vernachlässigbar) und dem Materialgesetz $M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes $\rho$, $A$, $E$, $I$ die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_B^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \text{mit} \quad c_B := \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{16}$$

Das war zu zeigen.

**(b)** Mit dem Separationsansatz nach Bernoulli

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{17}$$

ergeben sich die beiden gewöhnlichen DGL

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \text{und} \tag{18}$$

$$X'''' - \lambda^4 X = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}}. \tag{19}$$

Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (18) und (19) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Es ergeben sich die allgemeinen Lösungen

$$T(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t \quad \text{und} \tag{20}$$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\cosh\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{21}$$

mit den unbekannten Koeffizienten $A, \dots, D, U, V$.

**(c)** Die Randbedingungen des Balkens sind:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$w''(x=0,t) = 0 \tag{RB 2}$$

$$w(x=l,t) = w_0 \sin\omega t \tag{RB 3}$$

$$w''(x=l,t) = 0 \tag{RB 4}$$

**(d)** Im eingeschwungenen Zustand schwingt der Balken mit der Frequenz der äußeren Anregung. Da es auf die Phasenverschiebung nicht ankommt, lässt sich die Zeitfunktion annehmen zu

$$T(t) = \sin\Omega t. \tag{22}$$

Durch Auswertung der Randbedingungen (RB 1) und (RB 2) folgt unmittelbar

$$\text{(RB 1):} \quad A + C = 0 \tag{23}$$

$$\text{(RB 2):} \quad -A + C = 0. \tag{24}$$

Daher muss gelten $A = C = 0$ und die Ortsfunktion vereinfacht sich zu

$$X(x) = B\sin\lambda x + D\sinh\lambda x \tag{25}$$

Des Weiteren ergibt die Auswertung der Randbedingungen (RB 3) und (RB 4):

$$\text{(RB 3):} \quad -B\sin\lambda l + D\sinh\lambda l = 0 \tag{26}$$

$$\text{(RB 4):} \quad B\sin\lambda l + D\sinh\lambda l = w_0. \tag{27}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (26) und (27) lassen sich die verbleibenden Koeffizienten der Ortsfunktion bestimmen:

$$D = \frac{w_0}{2\sinh\lambda l} \quad \text{und} \tag{28}$$

$$B = \frac{w_0}{2\sin\lambda l}. \tag{29}$$

Somit lautet die Ortsfunktion

$$X(x) = \frac{w_0}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda l}\right). \tag{30}$$

und die Durchbiegung ist

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda l}\right)\sin\Omega t. \tag{31}$$

**(e)** Gleichung (31) lässt sich umformen zu

$$w(x,t) = \frac{\frac{w_0}{2}(\sinh\lambda l\sin\lambda x + \sin\lambda l\sinh\lambda x)\sin\Omega t}{\sin\lambda l\sinh\lambda l} \tag{32}$$

Im Resonanzfall wächst die Amplitude über alle Grenzen. Das ist der Fall, wenn die Erregerfrequenz $\Omega$ gerade eine Polstelle von Gleichung (32) ist , also wenn

$$\sin \lambda l \sinh \lambda l = 0 \tag{33}$$

gilt. Da der Hyperbelsinus seine einzige Nullstelle bei Null hat, führt das auf die Bestimmungsgleichung

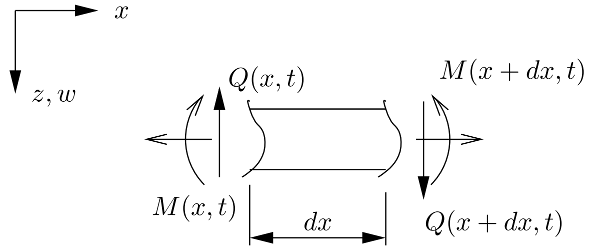
$$\sin \lambda l = 0 \quad \text{also} \tag{34}$$
$$\Leftrightarrow \lambda l = k\pi, k \in \mathbb{N} \tag{35}$$
$$\Leftrightarrow \Omega_R = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

---

# Hausaufgaben

### Aufgabe 32

Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung:




Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx,t) - Q(x,t) \tag{37}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $Q(x+dx,t) \cong Q(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x}dx$ ergibt sich

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{38}$$

mit $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ und dem Materialgesetz $M = -EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes $\rho$,A,E,I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{39}$$

**(a)** Separationsansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{40}$$

Eingesetzt in (39) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{41}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2}X = 0 \tag{42}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und $\omega$ noch zu bestimmende Konstante.

**(b)** Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (41) und (42) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Die als allgemeine Lösung resultierende Linearkombination der Exponentialfunktionen ist äquivalent zu einer Linearkombination aus Sinus und Kosinus bzw. zusätzlich sinh und cosh.

Für die Zeitfunktion erhalten wir:

$$T(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{43}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$X(x) = B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_5 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_6 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x \tag{44}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (39) lautet dann:

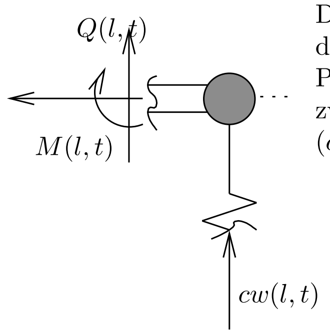
$$\omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(B_{1,k}\cos \omega_k t + B_{2,k}\sin \omega_k t\Big)\Big(B_{3,k}\cosh \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{4,k}\sinh \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{5,k}\cos \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x + B_{6,k}\sin \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}}x\Big) \tag{45}$$

**(c)** Am linken Rand besteht eine feste Einspannung charakterisiert durch die geometrischen Randbedingungen:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = 0 \tag{RB 2}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit und die Feder leitet auch kein Moment ein:

$$M(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{(x=l,t)} = 0 \tag{RB 3}$$




Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse $m$ aus dem zweiten Newtonschen Gesetz ($c$ = Federsteifigkeit):

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) - cw|_{(x=l,t)} \tag{46}$$

mit $Q = -EIw'''$ ergibt sich:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\bigg|_{(x=l,t)} = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\bigg|_{(x=l,t)} - cw|_{(x=l,t)} \qquad \text{(RB 4)}$$

**(d)** Bei Einsetzen der allg. Lösung in die Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$X''(x) = \frac{\omega}{c_Q}\Big[B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_5\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \tag{47}$$

$$X'''(x) = \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big[B_3\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_4\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x + B_5\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x - B_6\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}x\Big] \tag{48}$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \tag{49}$$

Jede einzelne Fundamentallösung soll die Randbedingungen zu jeder Zeit erfüllen. Deshalb gilt $\forall k$ mit den Abkürzungen $B_3 := B_{3,k}\,,\ \ldots$:

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \tag{50}$$

$$\text{(RB 2)} \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \tag{51}$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$B_3\cosh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l + B_4\sinh\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_3\big)\cos\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l - \big(-B_4\big)\sin\sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l = 0 \tag{52}$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für $B_3$ und $B_4$, zusammen mit (52) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{53}$$

mit

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \cosh\chi + \cos\chi \\
M_{12} &= \sinh\chi + \sin\chi \\
M_{21} &= -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\cosh\chi - \cos\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) \\
M_{22} &= -\frac{1}{EI}(m\omega^2 - c)\Big(\sinh\chi - \sin\chi\Big) - \Big(\frac{\omega}{c_Q}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(\cosh\chi + \cos\chi\Big) \\
\chi &:= \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}}l
\end{aligned} \tag{54}$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet ($m_B = A\rho l$):

$$M_{11}\,M_{22} - M_{12}\,M_{21} \stackrel{!}{=} 0 \tag{55}$$

$$\frac{m}{m_B}\chi - \frac{cl^3}{EI}\chi^{-3} = \frac{1+\cosh\chi\cos\chi}{\cosh\chi\sin\chi - \sinh\chi\cos\chi} \tag{56}$$

Durch numerische Auswertung von (56) mit (54) lassen sich die Eigenfrequenzen $\omega_k$ ermitteln.

Die Gleichung (44) beschreibt die Eigenformen, wenn darin die ermittelten Eigenfrequenzen $\omega_k$ und die dazugehörigen Koeffizienten $B_3 \ldots B_6$ eingesetzt werden.

---

## Aufgabe 46

**(a)** $w(x,t)$ sei die Durchsenkung des Balkens.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_B^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \qquad , c_B^2 = \frac{EI}{\rho A} \tag{57}$$

Geometrische Randbedingung an beiden Seiten:

$$w(x=0,t) = 0 \qquad \text{(RB 1)}$$

$$w(x=L,t) = 0 \qquad \text{(RB 2)}$$

Links ist das Moment gleich Null (drehbares Lager) und rechts ist es vorgegeben:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,t} = 0 \qquad \text{(RB 3)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=L,t} = -\frac{M_0}{EI}\cos\Omega t \qquad \text{(RB 4)}$$

**(b)** Gesucht wird eine Schwingung mit der Frequenz der Anregung. Ansatz für eine solche partikuläre Lösung:

$$w(x,t) = X(x)\cos\Omega t \tag{58}$$

eingesetzt in (57):

$$X'''' - \frac{\Omega^2}{c_B^2}X = 0 \tag{59}$$

Die allgemeine homogene Lösung dieser gewöhnlichen linearen homogenen DGL lautet:

$$X(x) = A_1\cosh\lambda x + A_2\sinh\lambda x + A_3\cos\lambda x + A_4\sin\lambda x \qquad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{\Omega}{c_B}} \tag{60}$$

(Im Unterschied zu den Eigenwertproblemen bei freien Schwingungen sind $\Omega$ und damit auch $\lambda$ bekannt!)

Die Konstanten $A_1$ bis $A_4$ müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. (60) eingesetzt in

$$\text{(RB 1)} \Rightarrow \qquad A_1 + A_3 = 0 \tag{61}$$

$$\text{(RB 3)} \Rightarrow \qquad A_1 - A_3 = 0 \tag{62}$$

$$\hookrightarrow A_1 = 0,\ A_3 = 0 \tag{63}$$

$$(\text{RB }2) \Rightarrow \quad A_2 \sinh \lambda L + A_4 \sin \lambda L = 0 \tag{64}$$

$$(\text{RB }4) \Rightarrow \quad A_2 \sinh \lambda L - A_4 \sin \lambda L = -\frac{M_0}{\lambda^2 EI} \tag{65}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion von Gl. (64) und (65) ergibt sich:

$$A_2 = \frac{-M_0}{2EI\lambda^2 \sinh \lambda L} \tag{66}$$

$$A_4 = \frac{M_0}{2EI\lambda^2 \sin \lambda L} \tag{67}$$

Nebenbemerkung:
Der Nenner von $A_4$ wird Null und damit die Auslenkung unendlich („Resonanzkatastrophe“) wenn

$$\lambda L = k\pi \qquad , k = 1, 2, 3, ...\infty \tag{68}$$

$$\Rightarrow \Omega = c_B \frac{\pi^2}{L^2} k^2 \qquad , k = 1, 2, 3, ...\infty \tag{69}$$

angepaßte Lösung, Schwingungsform:

$$X(x) = \frac{M_0}{2EI\lambda^2} \left[ \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda L} - \frac{\sinh \lambda x}{\sinh \lambda L} \right] \tag{70}$$