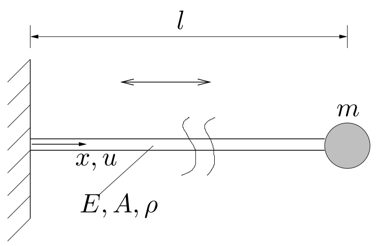
# Tutorium

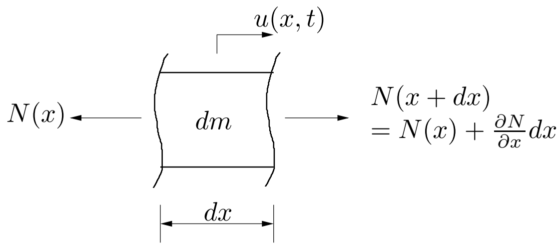
### Aufgabe 19

**Longitudinalschwingung**




Herleitung der Differentialgleichung:

dazu Freischnitt eines Massenelementes




Impulssatz:

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum F = N(x) + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N(x)$$

mit $dm = \rho A dx$

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} dx$$

geteilt durch $dx$ und mit Hookschem Materialgesetz $N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

geteilt durch $\rho$ und $A$ mit $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$, es ergibt sich:

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{1}$$

homogene, lineare, partielle Dgl. 2. Ordnung

**(a)** Separationsansatz nach Bernoulli:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2}$$

wobei $X(x)$ die sogenannte Ortsfunktion und $T(t)$ die Zeitfunktion ist.

Einsetzen in die Dgl. und Teilen durch $X(x)$ und $T(t)$:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_L^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = const. = -\omega_L^2$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine reine Zeitfunktion, die rechte Seite eine reine Ortsfunktion. Linke und rechte Seite der Gleichung können zu allen Zeiten und an allen Orten nur gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten $-\omega_L^2$ sind. So ergeben sich zwei gewöhnliche Dgln.:

$$\ddot{T}(t) + \omega_L^2 T(t) = 0 \tag{3}$$

$$X''(x) + \left(\frac{\omega_L}{c_L}\right)^2 X(x) = 0 \tag{4}$$

**(b)** allgemeine Lösung dieser Dgln.:

$$T(t) = A_1 \sin \omega_L t + A_2 \cos \omega_L t \tag{5}$$

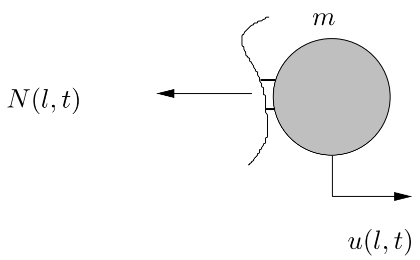
$$X(x) = B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L} x + B_2 \cos \frac{\omega_L}{c_L} x \tag{6}$$

**(c)** Rand und Übergangsbedingungen:

Geometrische Randbedingung an der Einspannung:

$$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \tag{RB 1}$$

$$\Rightarrow X(0) = 0 = B_1 \cdot 0 + B_2 \cdot 1 \ \Rightarrow \underline{B_2 = 0}$$




Impulssatz am rechten Ende des Balkens:

$$m\ddot{u}(l,t) = -N(l,t)$$

mit dem Hookschen Materialgesetz $N(l,t) = EAu'(l,t)$ ergibt sich die dynamische Randbedingung

$$m\ddot{u}(l,t) = -EAu'(l,t)\ . \tag{RB 2}$$

**(d)** Es wird die allgemeine Lösung (2) mit (5) und (6) in die Randbedingungen eingesetzt. Aus (RB 2) ergibt sich (mit $B_2 = 0$ und $\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega_L^2$, s. Gl. (3) ):

$$-\omega_L^2 B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L} l = -\frac{EA}{m} \frac{\omega_L}{c_L} B_1 \cos \frac{\omega_L}{c_L} l \tag{7}$$

$$\frac{\omega_L}{c_L} l \tan \frac{\omega_L}{c_L} l = \frac{EAl}{mc_L^2} = \frac{EA\rho l}{mE} = \frac{m_S}{m} \tag{8}$$

wobei $m_S$ die Masse des Stabes und m die Einzelmasse ist

lösen:

$$\frac{\omega_L}{c_L} l \tan \frac{\omega_L}{c_L} l = \frac{m_S}{m}$$

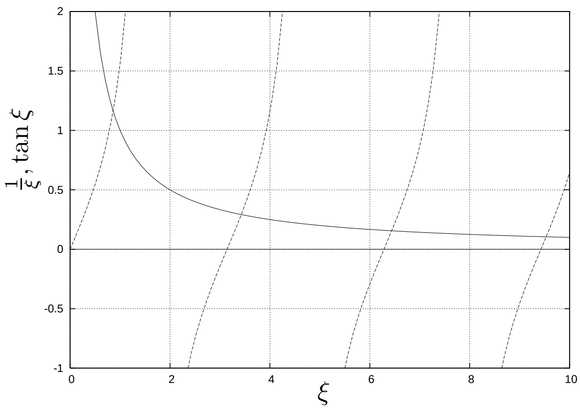
bzw. mit den Abkürzungen $\frac{\omega_L}{c_L} l = \xi$ und $\frac{m_S}{m} = \kappa$

$$\xi \tan \xi = \kappa$$

Geteilt durch $\xi$ ergibt sich die transzendente Gleichung:

$$\underline{\tan\xi = \frac{\kappa}{\xi}}\ ,$$

mit $\xi$ als unbekannter Größe. Diese Gleichung ist nur numerisch oder grafisch lösbar. Für $\kappa = 1$ (die Stabmasse ist gleich der Einzelmasse) ergibt sich z.B.: $\xi_1 = 0{,}86 \quad \Rightarrow$ erste Eigenfrequenz: $\underline{\omega_{L1} = \frac{\xi_1 c_L}{l}}$




Man sieht, es gibt unendlich viele Lösungen für $\xi$ und somit auch unendlich viele Eigenkreisfrequenzen $\omega_L$.

$$\omega_{Lk} = \frac{\xi_k c_L}{l} = \xi_k \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{1}{l}$$

**(e)** Die Eigenformen werden durch die Ortsfunktion (6) beschrieben, mit $B_2 = 0$:

$$X(x) = B_1 \sin\frac{\omega_L}{c_L}x$$

Offenbar hängen die Eigenformen von $\omega_L$ und damit vom Massenverhältnis $\kappa$ zwischen Stab und Einzelmasse ab.

---

**Aufgabe 38**

**(a)** Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \tag{9}$$

beschreibt die Längsschwingungen des untersuchten Stabes.

**(b)** Die Randbedingungen erhält man durch geeignete Schnitte am linken und rechten Rand:

$$0 = N\left(-\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(-\frac{l}{2}, t\right) - F(t) \tag{10a}$$

$$0 = -N\left(\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(\frac{l}{2}, t\right) + F(t) \tag{10b}$$

Für die Normalkraft $N(x,t)$ gilt der Zusammenhang

$$N(x,t) = EA\frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

der aus dem Werkstoffgesetz und der Kinematik hergeleitet werden kann.

**(c)** Zur Berechnung der Längsschwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung der DGL. Ansatz:

$$u_p(x,t) = X(x)\cos\Omega t \quad .$$

Die Systemantwort gehorcht also dem gleichen Zeitgesetz, wie die Anregung (Gleichtaktansatz).

Dieser Produktansatz überführt die partielle Differentialgleichung (9) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{\Omega}{c} \quad . \tag{11}$$

Die Lösung von (11) lautet bekanntlich

$$X = \alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x \quad . \tag{12}$$

Die Randbedingungen (10) kann man nun für die Ortsfunktion formulieren

$$0 = EAX'\left(-\frac{l}{2}\right) - kX\left(-\frac{l}{2}\right) - F_0 \tag{13a}$$

$$0 = -EAX'\left(\frac{l}{2}\right) - kX\left(\frac{l}{2}\right) + F_0 \tag{13b}$$

Einsetzen von (12) in die Randbedingungen (13) ergibt mit der Abkürzung $\xi = \frac{\lambda l}{2}$ unter Ausnutzung von $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} F_0 &= EA\lambda(\alpha\sin\xi + \beta\cos\xi) - k(\alpha\cos\xi - \beta\sin\xi) \\ F_0 &= EA\lambda(-\alpha\sin\xi + \beta\cos\xi) + k(\alpha\cos\xi + \beta\sin\xi) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\alpha$ und $\beta$. Durch Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen erhält man unmittelbar die Forderungen, die an $\alpha$ und $\beta$ für alle Zeiten gestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad , \\ \beta &= \frac{F_0}{EA\lambda\cos\frac{\lambda l}{2} + k\sin\frac{\lambda l}{2}} \quad . \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich nun durch Einsetzen der berechneten Konstanten $\alpha$ und $\beta$

$$u_p(x,t) = \frac{F_0\sin\lambda x}{EA\lambda\cos\frac{\lambda l}{2} + k\sin\frac{\lambda l}{2}}\cos\Omega t \quad , \tag{15}$$

mit

$$\lambda = \frac{\Omega}{c} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad .$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (15) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand. Der Verlauf der Verschiebung ist sinusförmig und oszilliert mit $\Omega$. Die Amplitude hängt von Systemgrößen wie $k$ und $EA$, aber auch von der Abstimmung der Erregung auf die Systemgrößen ab.

**(d)** Der Punkt Q bewegt sich nicht, wenn

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(\frac{l}{2},t\right)} = 0$$

für alle Zeiten $t$. D.h.

$$\sin\frac{\lambda l}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{2n\pi c}{l} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für diese Frequenzen ist der Nenner der Ortsfunktion ungleich 0.

# Hausaufgaben

### Aufgabe 9

Teil II
Wie üblich werden die Abkürzungen

$$\mathrm{c}_\boxtimes := \cos\boxtimes \tag{16}$$

$$\mathrm{s}_\boxtimes := \sin\boxtimes \tag{17}$$

mit dem Platzhalter $\boxtimes$ benutzt.

**(a)**

$$w(x,t) = (A\mathrm{c}_{\omega t} + B\mathrm{s}_{\omega t})(C\mathrm{c}_{\frac{\omega}{c}x} + D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}x}) \tag{18}$$

Die Randbedingungen lauten 1. $w(x=0,t) = 0$ und 2. $w(x=l,t) = 0$. Sie müssen für alle Zeiten gelten, d.h.

$$0 = (C\mathrm{c}_{\frac{\omega}{c}0} + D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}0}) \tag{19}$$

$$0 = C + 0 \tag{20}$$

$$0 = C \tag{21}$$

Die erste Randbedingung liefert also $C = 0$. Mit diesem Ergebnis und der zweiten Randbedingung gilt:

$$0 = D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}l} \tag{22}$$

$$0 = \mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}l} \tag{23}$$

Damit ergeben sich die $k$ Eigenfrequenzen aus:

$$\left\{\frac{\omega}{c}l\right\}_k = k\pi \quad \text{für } k = 1,2,...,\infty \tag{24}$$

$$\omega_k = k\frac{c}{l}\pi \tag{25}$$

**(b)** Die Lösung lautet also mit den Eigenfrequenzen von oben:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{c}_{\omega_k t} + B_k\mathrm{s}_{\omega_k t})\mathrm{s}_{\frac{\omega_k}{c}x} \tag{26}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{c}_{\omega_k t} + B_k\mathrm{s}_{\omega_k t})\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} \tag{27}$$

Diese Lösung wird nun an die Anfangsbedingungen 1. $w(x,t=0) = w_A$ und 2. $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$ angepasst. Die erste Anfangsbedingung liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} = w_0\mathrm{s}_{1\pi\frac{x}{l}} \tag{28}$$

$$\xrightarrow{\text{Orthogonalität}} A_1 = w_0 \quad \text{und } A_k = 0 \quad \forall k\backslash\{1\} \tag{29}$$

Dieses Ergebnis und die zweite Anfangsbedingung zusammen liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\omega_k\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} = 0 \tag{30}$$

$$\longrightarrow B_k = 0 \quad \forall k \tag{31}$$

Damit ist die spezielle Lösung bekannt. Sie heißt:

$$w(x,t) = w_0\mathrm{c}_{\omega_1 t}\mathrm{s}_{\frac{\omega_1}{c}x} \tag{32}$$

$$= w_0\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}} \tag{33}$$

**(c)**

$$w(x,t=0) = f_1(\xi_1(x-0t) + f_2(\xi_2 = x+0t) \tag{34}$$

$$w(x,t=0) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\right\} \tag{35}$$

$$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x-ct}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x+ct}{l}}\right\} \tag{36}$$

**(d)**

$$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}-\pi\frac{ct}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}+\pi\frac{ct}{l}}\right\} \tag{37}$$

$$= \frac{1}{2}w_0\left\{\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} - \mathrm{c}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{ct}{l}} + ... \right.$$

$$\left. ... + \mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} + \mathrm{c}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{ct}{l}}\right\} \tag{38}$$

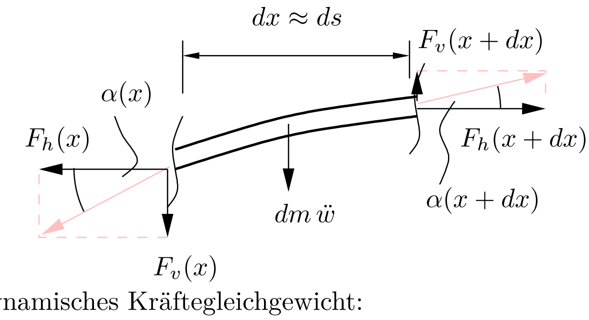
$$= w_0\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} \tag{39}$$

$$= X(x)\cdot T(t) \tag{40}$$

---

### Aufgabe 12

**(a) Wellengleichung**
Freischnitt am differentiell kleinen Element: Freischnitt am differentiell kleinen Element:




Dynamisches Kräftegleichgewicht:

$$dm\,\ddot{u}(x,t) = F_h(x+dx,t) - F_h(x,t) \tag{41}$$

$$\ddot{u} = 0, \text{ da reine Transversalschwingung}$$

$$\Rightarrow 0 = F_h'(x,t)\,dx \Rightarrow F_h(x,t) = F_h = \text{konst.} \tag{42}$$

$$dm\,\ddot{w}(x,t) = F_v(x+dx,t) - F_v(x,t) \tag{43}$$
$$\rho A\,dx\,\ddot{w}(x,t) = F_v'(x,t)\,dx \tag{44}$$

Kinematik:

$$\frac{F_v(x,t)}{F_h} = \tan\alpha(x,t) = w'(x,t) \tag{45}$$
$$\Rightarrow F_v(x,t) = F_h\,w'(x,t) \tag{46}$$
$$F_h = F_s\cos\alpha(x,t) \approx F_s \quad (\text{für kleine } \alpha) \tag{47}$$

Aus Gl. (44) mit Gl. (46) und Gl. (47) ergibt sich die folgende partielle Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{w}(x,t) - \frac{F_s}{\rho A}w''(x,t) = 0 \tag{48}$$

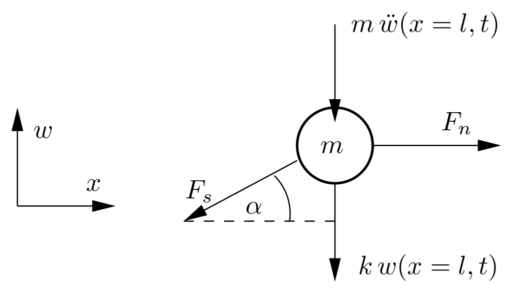
**(b) Eigenwertgleichung**
Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad \text{mit } c^2 = \frac{F_s}{\rho A} \tag{49}$$

Die geometrische Randbedingung am linken Rand wird durch

$$w(x=0,t) = 0 \tag{50}$$

beschrieben. Die dynamische Randbedingung am rechten Rand erhält man durch Betrachtung der freigeschnittenen Punktmasse.




Bei einer reinen Vertikalbewegung der Punktmasse gilt

$$F\cos\alpha = F_s \quad , \tag{51}$$
$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -kw(x=l,t) - F\sin\alpha. \tag{52}$$

Die Gleichungen (51) und (52) führen zu

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -kw(x=l,t) - F_s\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=l,t)}. \tag{53}$$

Die Eigenwertgleichung erhält man durch Anpassen dieser Randbedingungen an die Lösung

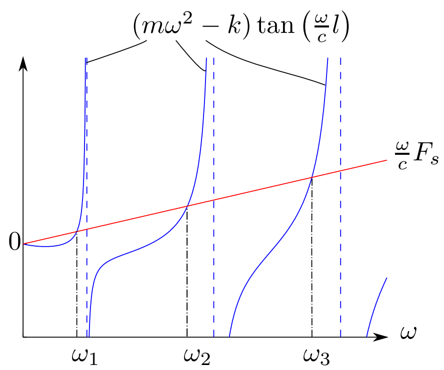
$$w(x,t) = \left[A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right]\cos(\omega t+\varphi). \tag{54}$$

Einsetzen von (54) in (50) ergibt sofort $B=0$. Einsetzen von (54) in (53) führt nach Umformen auf die Eigenwertgleichung

$$(m\omega^2 - k)\tan\left(\frac{\omega}{c}l\right) = \frac{\omega}{c}F_s. \tag{55}$$

Die Eigenwertgleichung (55) hat unendlich viele Lösungen $\omega_k$ mit $k\in\mathbb{N}$ Für gegebene Zahlenwerte für $m,k,l,\rho,A$ und $F_s$ kann man diese numerisch oder graphisch bestimmen.

Exemplarisch ist eine graphische Lösung der Eigenwertgleichung im folgenden Bild gezeigt.

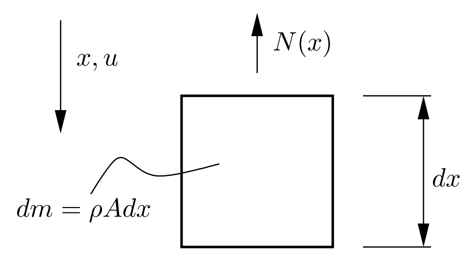



**(c) Erste Eigenfrequenz**
Einsetzen von $k = \frac{-4\rho Al+\pi m}{16\rho Al^2}\pi F_s$ und $\omega_1 = \frac{\pi c}{4l}$ in die Eigenwertgleichung zeigt, dass (55) tatsächlich erfüllt ist. Die erste Eigenform ist dann $X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4l}x\right)$.

---

**Aufgabe 16**

**(a)**




Materialgesetz:

$$N = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{56}$$

Zweites Newtonsches Gesetz für das infinitesimale Stabelement zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + dN - N = \frac{\partial N}{\partial x}dx \tag{57}$$

Das Materialgesetz (56) eingesetzt ergibt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad , c_L^2 = \frac{E}{\rho} \tag{58}$$

**(b)** Setze den Produktansatz nach Bernoulli

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{59}$$

in die Wellendifferentialgleichung(58) ein

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_L^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konst.} \tag{60}$$

Wir erhalten zwei gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{61}$$

$$X'' + \frac{\omega^2}{c_L^2} X = 0 \tag{62}$$

**(c)** Die allgemeinen Lösungen für diese DGln lauten:

$$T(t) = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \tag{63}$$

$$X(x) = D_3 \cos \frac{\omega}{c_L} x + D_4 \sin \frac{\omega}{c_L} x \tag{64}$$

**(d)** Oberer Rand: keine Verschiebung

$$u(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

Am unteren Rand bewirkt die Feder eine Normalkraft von

$$N(x=l,t) = -cu(x=l) \tag{65}$$

Mit dem Materialgesetz (56) ergibt sich

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l,t} + \frac{c}{EA} u\Big|_{x=l,t} = 0 \tag{RB 2}$$

**(e)** Zur Berechnung der Eigenfrequenzen spielt die Phasenlage der Zeitfunktion $T(t)$ keine Rolle. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir:

$$D_1 = 0 \tag{66}$$

Aus (**??**) folgt mit (64) in (59):

$$D_3 = 0 \tag{67}$$

Jetzt lautet (59) ausgeschrieben:

$$u(x,t) = D \sin \omega t \sin \frac{\omega}{c_L} x \tag{68}$$

(68) eingesetzt in (RB 2):

$$\tan \frac{l}{c_L} \omega = -\frac{EA}{c} \cdot \frac{\omega}{c_L} \tag{69}$$

Dies ist die Frequenzgleichung. Sie hat unendlich viele Lösungen $\omega_n, n = 1...\infty$: