# TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
Dr.-Ing. Roman Pohrt

## Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 14

### Thema: Kontaktmechanik von Elastomeren

### Aufgabe 1: Messung des Komplexen Moduls

Eine einfache Methode zur Bestimmung des Speicher- und Verlustmoduls von Elastomeren bietet das Torsionspendel (Abb. 1). Hierbei wird eine zylindrische Probe mit dem Radius $R$ und der Länge $l$ aus einem Elastomer an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende mit einem Rotationsträgheitsmoment $\theta$ verbunden. Das Pendel wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Gleichgewicht ausgelenkt und losgelassen. Aus den gemessenen Werten für Schwingungsfrequenz und Dämpfung sind der Speicher- und Verlustmodul zu bestimmen.

**Hinweis:** Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für den Verdrehwinkel $\varphi$ im Frequenzraum und machen Sie anschließend einen Koeffizientenvergleich für den Real- und Imaginärteil dieser Gleichung.

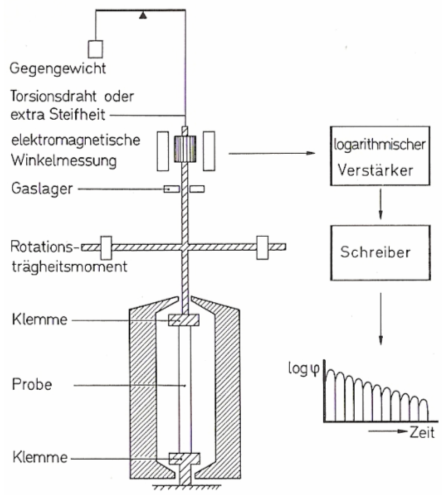
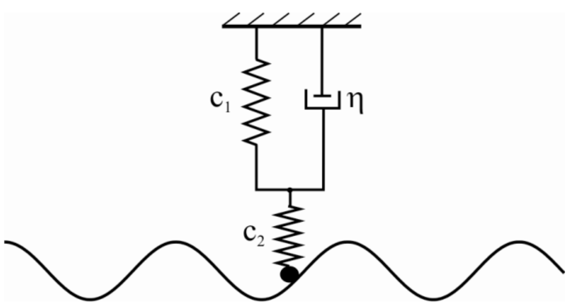



**Abb. 1: Aufbau eines Torsionspendels zur Messung des komplexen G-Moduls**

### Aufgabe 2: Gummireibung

Untersuchen Sie das einfachste rechts dargestellte Elastomer-Standardmodell mit den Materialparametern $c_1, c_2 >> c_1, \eta,$ dem man einige wichtige Eigenschaften der Gummireibung entnehmen kann. Betrachten Sie dazu einen Gummiblock aus einem solchen Elastomer, der mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ über eine gewellte, starre Oberfläche $h = h_0 \cos(\kappa x)$ gleitet.




Bestimmen Sie die über eine Periode gemittelte bei der Bewegung dissipierte Leistung $\langle \dot{W} \rangle$

a) durch explizite Lösung der Bewegungsgleichung
b) mit der komplexen Federsteifigkeit $\hat{c}(\omega)$ durch Anwendung der bekannten Gleichung

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{1}{2} \omega h_0^2 \operatorname{Im}\{\hat{c}(\omega)\}, \tag{1}$$

c) Wie groß ist die mittlere Reibkraft bei dieser Bewegung?

**Lösung Aufgabe 1:**

Die Bewegungsgleichung für das Pendel ist im Zeitbereich durch

$$\Theta\ddot{\varphi} = -M = -\frac{I_p}{l}\int_{-\infty}^{t} G(t-t')\dot{\varphi}(t')\,\mathrm{d}t' = -\frac{I_p}{l}(G*\dot{\varphi})(t) \tag{2}$$

gegeben. Bei einer harmonischen Schwingung mit der (komplexen) Frequenz $\omega$ kann diese Gleichung einfacher im Frequenzraum betrachtet werden. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Theta F_\omega\{\ddot{\varphi}(t)\} &= -\frac{I_p}{l}F_\omega\{G(t)\}F_\omega\{\dot{\varphi}(t)\} \\
-\omega^2\Theta F_\omega\{\varphi(t)\} &= -\frac{I_p}{l}\underbrace{F_\omega\{G(t)\}}_{\hat{G}(\omega)} i\omega F_\omega\{\varphi(t)\} \\
\omega^2 &= \frac{I_p}{l\Theta}\hat{G}(\omega)
\end{aligned} \tag{3}$$

Die komplexe Eigenfrequenz kann aus den Messwerten abgelesen werden:

$$\omega = \omega_0 + i\delta, \tag{4}$$

Mit der Eigenfrequenz $\omega_0$ und der Abklingkonstante $\delta$ der Schwingung. Man erhält:

$$\omega^2 - \delta^2 + i2\delta\omega = \frac{I_p}{\Theta l}(G' + iG''), \tag{5}$$

woraus sich die Werte des Speicher- und Verlustmoduls ablesen lassen:

$$G' = \frac{\Theta l}{I_p}(\omega^2 - \delta^2),\ \ G'' = \frac{2\delta\omega\Theta l}{I_p}. \tag{6}$$

**Lösung Aufgabe 2:**

a) Die Gleichgewichtsbedingung für den inneren Freiheitsgrad *u* ist durch

$$c_2(h-u) = c_1 u + \eta\dot{u} \tag{7}$$

gegeben. Mit $c_2 >> c_1$ und der obigen Fußpunktanregung ergibt sich als Bewegungsgleichung für *u:*

$$\frac{\eta}{c_2}\dot{u} + u = h_0\cos(\omega t) \tag{8}$$

Die homogene Lösung klingt ab und wir suchen nur die partikuläre. Diese suchen wir mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite als

$$\begin{aligned}
u_p(t) &= u_0\exp(i\omega t) \qquad & u_p &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
\dot{u}_p(t) &= i\omega u_0\exp(i\omega t) \qquad & \dot{u}_p(t) &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{9}$$

Einsetzen liefert

$$\frac{\eta}{c_2}\left(-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)\right)+A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)=h_0\cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t)\left(-A\omega\frac{\eta}{c_2}+B\right)+\cos(\omega t)\left(B\omega\frac{\eta}{c_2}+A\right)=h_0\cos(\omega t)$$

$$A\omega\frac{\eta}{c_2}=B \quad und \quad B\omega\frac{\eta}{c_2}+A=h_0 \tag{10}$$

$$A=\frac{h_0c_2^2}{\omega^2\eta^2+c_2^2} \quad und \quad B=\frac{\eta\omega h_0c_2}{\omega^2\eta^2+c_2^2}$$

$$u_p=\frac{h_0c_2^2}{\omega^2\eta^2+c_2^2}\left[\cos(\omega t)+\omega\frac{\eta}{c_2}\sin(\omega t)\right]$$

Die Amplitude davon ist

$$\begin{aligned}\hat{u}_p&=\frac{h_0c_2^2}{\omega^2\eta^2+c_2^2}\sqrt{1+\omega^2\frac{\eta^2}{c_2{}^2}}\\ \hat{u}_p&=\frac{h_0c_2}{\omega^2\eta^2+c_2^2}\left(c_2{}^2+\omega^2\eta^2\right)^{1/2}=\frac{h_0c_2}{\sqrt{\omega^2\eta^2+c_2^2}}\end{aligned}\tag{11}$$

Und die Phase $\varphi=\arctan(\eta\omega/c_2)$. Damit ergibt sich

$$u_p(t)=\frac{h_0c_2}{\sqrt{c_2^2+\eta^2\omega^2}}\cos(\omega t-\varphi),\quad \varphi=\arctan\left(\frac{\eta\omega}{c_2}\right). \tag{12}$$

Die in einer Periode dissipierte mittlere Leistung ist entsprechend

$$\begin{aligned}\left\langle\dot{W}\right\rangle&=\eta\left\langle\dot{u}_p^2\right\rangle=\eta\omega^2\hat{u}_p^2\left\langle\cos^2(\omega t)\right\rangle=\frac{1}{2}\eta\omega^2\hat{u}_p^2\\ &=\frac{\eta}{2}\frac{h_0^2c_2^2\omega^2}{c_2^2+\eta^2\omega^2}=\frac{\eta}{2}\frac{h_0^2c_2^2\kappa^2v_0^2}{c_2^2+\eta^2\kappa^2v_0^2}.\end{aligned}\tag{13}$$

b)

Die komplexe Feder ist eine Parallelschaltung von $c_1$ mit $i\omega\eta$ und das Ganze in Reihe mit $c_2$.

$$\hat{c}=\frac{c_2(c_1+i\omega\eta)}{(c_1+i\omega\eta)+c_2}\approx\frac{c_2(c_1+i\omega\eta)}{i\omega\eta+c_2} \tag{14}$$

Davon benötigen wir den Imaginärteil

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\{\hat{c}\}&=\mathrm{Im}\left\{\frac{c_2(c_1+i\omega\eta)(c_2-i\omega\eta)}{(c_2+i\omega\eta)(c_2-i\omega\eta)}\right\}\\ \mathrm{Im}\{\hat{c}\}&=\frac{c_2}{c_2{}^2+\omega^2\eta^2}\mathrm{Im}\{(c_1+i\omega\eta)(c_2-i\omega\eta)\}=\frac{c_2(\omega\eta c_2-\omega\eta c_1)}{c_2{}^2+\omega^2\eta^2}\approx\frac{c_2{}^2\omega\eta}{c_2{}^2+\omega^2\eta^2}\end{aligned}\tag{15}$$

Entsprechend ist die mittlere dissipierte Leistung wiederum

$$\left\langle\dot{W}\right\rangle=\frac{1}{2}\omega h_0^2\,\mathrm{Im}\{\hat{c}(\omega)\}=\frac{\eta}{2}\frac{h_0^2c_2^2\omega^2}{c_2^2+\eta^2\omega^2}=\frac{\eta}{2}\frac{h_0^2c_2^2\kappa^2v_0^2}{c_2^2+\eta^2\kappa^2v_0^2}. \tag{16}$$

c) Die mittlere Reibkraft beträgt damit

$$\left\langle F_R\right\rangle=\frac{\left\langle\dot{W}\right\rangle}{v_0}=\frac{\eta}{2}\frac{h_0^2c_2^2\kappa^2v_0}{c_2^2+\kappa^2v_0^2}. \tag{17}$$