TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

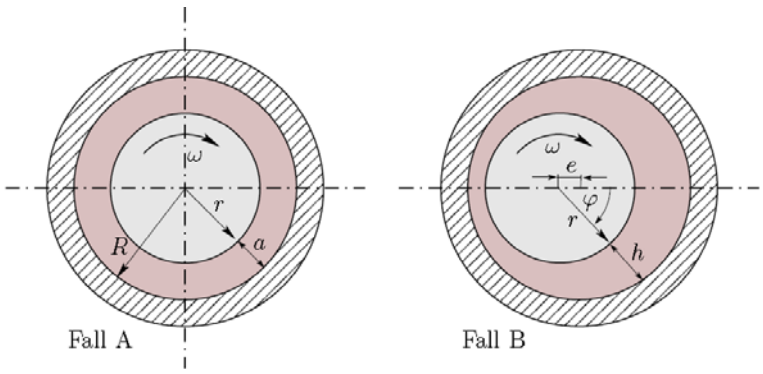
Prof. Dr. Valentin L. Popov
Dr.-Ing. Roman Pohrt

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 12

Thema: Hydrodynamische Schmierung

Aufgabe 1: Schmierung eines Lagers

Eine der technisch wichtigsten laminaren Bewegungen einer zähen Flüssigkeit ist die Bewegung eines Schmiermittels zwischen Zapfen und Lager. Im vorliegenden Fall dreht sich eine Welle mit Radius r und Länge l mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, während der äußere Zylinder vom Radius $r + a$ unbeweglich ist. Bei konzentrischer Bewegung (Fall A) ergibt sich lediglich ein Reibungsmoment an der Welle. Im Fall B liegt die Welle in Bezug auf das Lager exzentrisch, da sie unter Last ist. Es wird angenommen, dass die Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität η inkompressibel ist und den ganzen Raum zwischen Welle und Zapfen füllt. Ferner sei die Spaltbreite $a \ll r$, sodass mit genügender Genauigkeit für das im Spalt vorhandene Schmiermittel eine ebene Hagen-Poiseuille-Schichtenströmung vorausgesetzt werden darf. Da die auftretenden Reynoldszahlen gewöhnlich sehr klein sind, dürfen die Trägheitskräfte gegenüber den viskosen Kräften vernachlässigt werden.



a) Bestimmen Sie zunächst die Schichtdicke h als Funktion des Umlaufwinkels φ und anschließend die Geschwindigkeit des Fluides v_φ mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Gleichungen für eine Strömung nach Hagen-Poiseuille in Abhängigkeit von $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}$. (14.7)

b) Der Volumenstrom zwischen Zapfen und Lager soll mit $Q := l\omega r\, {}^{h_0}\!/_{2}$ bezeichnet werden. Berechnen Sie den noch unbekannten Koeffizienten h_0 durch Auswertung der periodischen Bedingung für den Druck $p(0) = p(2\pi)$. Diskutieren Sie anhand von $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\varphi$ im Anschluss daran die Form der Funktion $p(\varphi)$.

c) Bestimmen Sie die resultierende Kraft aus der Druckverteilung auf den Zapfen.

d) Wie groß ist das Widerstandsmoment an der Welle?

Lösung Aufgabe 1:

a) Aus dem Cosinus-Satz folgt die Beziehung

$$\begin{gathered}(r+a)^2 = e^2 + (r+h)^2 - 2e(r+h)\cos\varphi \\ \Rightarrow h = e\cos\varphi - r + \sqrt{(r+a)^2 - e^2\sin\varphi} \approx a + e\cos\varphi.\end{gathered} \tag{1}$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen ist die Strömung überall näherungsweise eben und tangential gerichtet. Für eine laminare Strömung wurde in der Vorlesung das Geschwindigkeitsprofil hergeleitet:

$$v_\varphi(z) = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}z(z-h) - \frac{v_0}{h}(z-h) = \frac{1}{2\eta r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}z(z-h) - \frac{\omega r}{h}(z-h). \tag{2}$$

b) Der Volumenstrom ergibt sich zu

$$\begin{gathered}Q = l\int_0^h v(z)\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\frac{h^3}{12\eta} + \frac{\omega r h}{2}\right]l := l\omega r\frac{h_0}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi} = 6\omega r^2\eta\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Die Auswertung der Periodizität

$$p(2\pi) - p(0) = 6\eta\omega r^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3}\,\mathrm{d}\varphi = 0 \tag{4}$$

liefert dann mithilfe der Integrale

$$\begin{gathered}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h^2} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+e\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-e^2)^3}}, \\ \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h^3} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+e\cos\varphi)^3} = \frac{\pi(2a^2+e^2)}{\sqrt{(a^2-e^2)^5}}\end{gathered} \tag{5}$$

die gesuchte Länge

$$h_0 = 2a\frac{a^2-e^2}{2a^2+e^2}. \tag{6}$$

Da h eine gerade Funktion in φ ist, ist die Druckdifferenz $p(\varphi) - p(0)$ eine ungerade Funktion und damit aus Symmetriegründen $p(\pi) = p(0)$. Der Druck hat Extremstellen, wenn $h_0 = h$ ist, d.h. für

$$2a\frac{a^2-e^2}{2a^2+e^2} = a + e\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{3ae}{2a^2+e^2} < 0. \tag{7}$$

Dies entspricht genau jeweils einem Extremum an der Unter- und Oberseite. Außerdem ist der Druckgradient bei $\varphi = 0$ positiv. An der Unterseite des Zapfens herrscht daher Überdruck, an der Oberseite Unterdruck.

c) Da die Druckdifferenz eine ungerade Funktion in φ ist, verschwindet die horizontale Komponente der resultierenden Kraft. Für die vertikale Komponente erhält man mit der partiellen Integration

$$F_z = lr\int_0^{2\pi}\Delta p(\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = lr\left[\Delta p\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right] \tag{8}$$

und den Integralen

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{h^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\left(a+e\cos\varphi\right)^2}=-\frac{2\pi e}{\sqrt{\left(a^2-e^2\right)^3}},$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\;\mathrm{d}\varphi}{h^3}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\left(a+e\cos\varphi\right)^3}=-\frac{3\pi ea}{\sqrt{\left(a^2-e^2\right)^5}} \tag{9}$$

das Ergebnis

$$F_z=\frac{12\pi\eta\omega lr^3}{\sqrt{a^2-e^2}}\frac{e}{2a^2+e^2}. \tag{10}$$

d) Die Tangentialspannungen am Zapfen sind

$$\tau=\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi}\frac{h}{2}-\frac{\eta\omega r}{h}=-\eta\omega r\left(\frac{4}{h}-\frac{3h_0}{h^2}\right). \tag{11}$$

Das gesamte Widerstandsmoment ist damit

$$\begin{aligned}M_R&=lr^2\int_0^{2\pi}\tau\left(\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=-\eta\omega lr^3\left(4\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h}-3h_0\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{h^2}\right)\\&=-\eta\omega lr^3\left(\frac{8\pi}{\sqrt{a^2-e^2}}-\frac{12\pi a^2}{2a^2+e^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-e^2}}\right)=-\frac{4\pi\eta\omega lr^3}{\sqrt{a^2-e^2}}\frac{a^2+2e^2}{2a^2+e^2}.\end{aligned} \tag{12}$$