TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

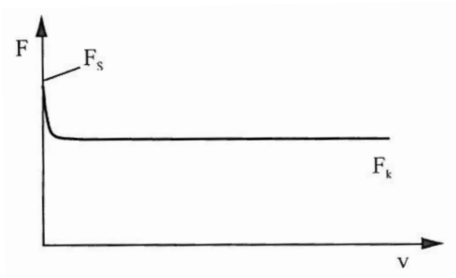
FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
Dr.-Ing. Roman Pohrt

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 11

Thema: Schwingungen und Reibung

Aufgabe 1: Stick-Slip-Bewegung



Als einfaches Modell einer Reibpaarung soll ein starrer Block, der mittels einer Feder über einen reibungsbehafteten Untergrund gezogen wird, untersucht werden. Es wird angenommen, dass die Reibkraft nur bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ($v \approx 0$) erhöht ist und mit steigender Geschwindigkeit sehr schnell auf ein konstantes, niedrigeres Niveau abfällt. Die Feder wird mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 gezogen. Untersuchen Sie das Verhalten des Systems.
Zu Beginn sei die Feder entspannt und der Block in Ruhe mit $x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$.

(a) Wann beginnt der Block zu gleiten?

(b) Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Block während der Gleitphase.

(c) Wann kommt der Block wieder zur Ruhe? Kann er in dieser Konfiguration haften?

Lösung Aufgabe 1

Zunächst haftet der Block über einen Zeitraum von $t_0 = \frac{F_s}{c \cdot v_0}$ dann beginnt das Gleiten.

Die Position des blockfernen Federpunkts sei $x_d(t) = v_0 t + \frac{F_s}{c}$. Somit beginnt das Gleiten bei $t = 0$.

Die Bewegungs-DGL lautet

$$\begin{aligned} \ddot{x}m &= c\left(x_d - x\right) - F_k \\ \ddot{x} + \frac{c}{m}x &= \frac{cv_0t}{m} + \frac{F_s - F_k}{m} \end{aligned} \tag{1}$$

Lösung der homogenen DGL mit $\omega = \sqrt{c/m}$

$$x_h(t) = a \cdot \sin\omega t + b \cdot \cos\omega t \tag{2}$$

Partikuläre Lösung für $\ddot{x}(t) = 0$ (Die Masse folgt gleichförmig dem Angriffpunkt)

$$x_p(t) = v_0 t + \frac{F_s - F_k}{c} \tag{3}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \sin\omega t + b \cdot \cos\omega t + v_0 t + \frac{F_s - F_k}{c} \\ \dot{x}(t) &= a\omega \cdot \cos\omega t - b\omega \cdot \sin\omega t + v_0 \\ \ddot{x}(t) &= -a\omega^2 \cdot \sin\omega t - b\omega^2 \cdot \cos\omega t \end{aligned} \tag{4}$$

Anfangsbedingungen $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$ liefern

$$b = -\frac{F_s - F_k}{c} \tag{5}$$

$$a = -\frac{v_0}{\omega} \tag{6}$$

Mit $a\cos\alpha + b\sin\alpha = \operatorname{sgn}(a)\sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(\alpha + \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= -\underbrace{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{\left(F_s - F_k\right)^2}{c^2}}}_{A}\cos\left(\omega t + \underbrace{\arctan\left(\frac{F_k - F_s}{c}\frac{\omega}{v_0}\right)}_{\phi}\right) + v_0 t + \frac{F_s - F_k}{c} \\ \dot{x}(t) &= \omega A \sin\left(\omega t + \phi\right) + v0 \\ \ddot{x}(t) &= \omega^2 A \cos\left(\omega t + \phi\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Die Masse bleibt stehen wenn $\dot{x}\left(t_{stop}\right) = 0$ und dann ist

$$\sin\left(\omega t_{stop} + \phi\right) = -\frac{v_0}{\omega A} \tag{8}$$

Und zu diesem Zeitpunkt gilt für die Beschleunigung

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}(t) = \omega^2 A\cos\left(\omega t_{stop} + \phi\right) \\
&\ddot{x}(t) = \pm\omega^2 A\sqrt{1-\sin^2\left(\omega t_{stop} + \phi\right)} \\
&\ddot{x}(t) = \pm\omega^2 A\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{\omega^2 A^2}} = \pm\omega^2\sqrt{A^2 - \frac{{v_0}^2}{\omega^2}} = \pm\omega^2\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + \frac{\left(F_s - F_k\right)^2}{c^2} - \frac{{v_0}^2}{\omega^2}} = \pm\frac{\omega^2}{c}\left(F_s - F_k\right) \\
&= \pm\frac{1}{m}\left(F_s - F_k\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Wir suchen die Lösung mit negativer Beschleunigung und $F_s > F_k$. Somit ist „minus“ einzusetzen. Dann gilt wegen $\ddot{x}m = F_{Feder} - F_k$

$$
F_{Feder} = 2F_k - F_s \tag{10}
$$

Das ist immer kleiner als F_s. Daher wird der Block stehen bleiben und es beginnt eine neue Haftphase.