TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 07

Thema: Tangentialkontakt

Aufgabe 1: Schiefe Kraft und schiefe Verschiebung

Eine elastische Kugel wird an eine starre Ebene gedrückt (siehe Abb. 1), wobei einmal die Richtung der Anpresskraft und einmal die Richtung der Verschiebung immer dieselbe bleibt. Zu bestimmen sind die Bedingungen, unter denen das gesamte Kontaktgebiet immer haftet.

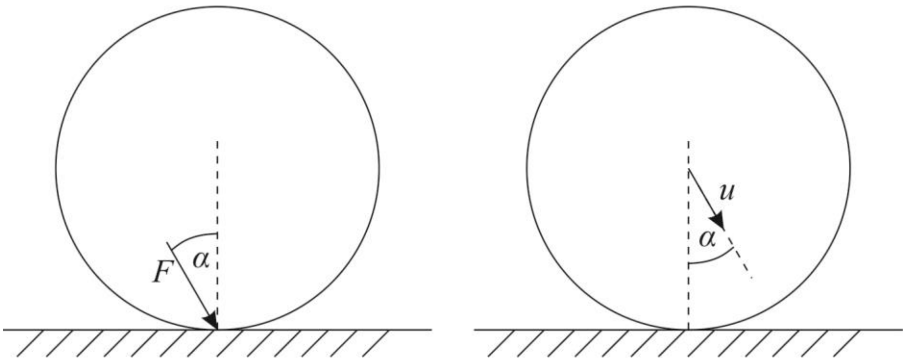

Abb. 1 Elastische Kugel, die schräg an eine starre Ebene gedrückt wird.

(a) Bestimmen Sie die Druckverteilung und durch Integration über den Indentierungsprozess die Verteilung der Tangentialspannungen unter der Annahme des ständigen vollständigen Haftens des Kontaktgebiets für den Fall der schiefen Kraft. Wann kann der Kontakt vollständig haften?

(b) Führen Sie die gleiche Rechnung noch einmal für den Fall der schiefen Verschiebung durch. Wann kann der Kontakt vollständig haften? Warum unterscheidet sich das Ergebnis von dem in (a)?

Lösung Aufgabe 1:

In der Vorlesung wurde der Fall einer konstanten Normalkraft (und entsprechend einem festen Kontaktradius *a*) mit einer ansteigend aufgebrachten Tangentialkraft gelöst (das Cattaneo-Mindlin-Problem). In der vorliegenden Aufgabe wachsen beide Kräfte gleichzeitig, wobei

$$F_x = F_N \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F_N \tan\alpha. \tag{1}$$

a) Die Indentierung verläuft von einem Kontaktradius $\tilde{a}=0$ bis zum Kontaktradius $\tilde{a}=a$, wobei

$$\tilde{F}_N = \frac{4}{3}E^*\frac{\tilde{a}^3}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\tilde{F}_N = 4E^*\frac{\tilde{a}^2}{R}\mathrm{d}\tilde{a}. \tag{2}$$

Wenn man annimmt, dass das gesamte Kontaktgebiet während des ganzen Prozesses haftet, ist der inkrementelle Beitrag zur Schubspannung, wenn das Kontaktgebiet von $\tilde{a}$ zu $\tilde{a}+\mathrm{d}\tilde{a}$ wächst, durch

$$\mathrm{d}\tau(r) = \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_x}{2\pi\tilde{a}^2}\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_N \tan\alpha}{2\pi\tilde{a}^2}\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\tilde{a}, \quad r \le \tilde{a}. \tag{3}$$

gegeben. Die gesamte Schubspannung ergibt sich aus dem Integral (es ergeben sich erst Beiträge zur Schubspannung, wenn $\tilde{a} \ge r$, daher die Untergrenze *r*)

$$\tau(r;a) = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha\int_r^a\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\tilde{a} = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha\sqrt{a^2-r^2}. \tag{4}$$

Die Druckverteilung ist aus der Hertzschen Lösung bekannt:

$$p(r;a) = \frac{2E^*}{\pi R}\sqrt{a^2-r^2}. \tag{5}$$

Das gesamte Kontaktgebiet kann immer haften, falls

$$\tau(r) \le \mu p(r) \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha < \mu. \tag{6}$$

b) Das Inkrement der Schubspannung ist nun

$$\mathrm{d}\tau(r) = \frac{G^*\mathrm{d}u_x}{\pi\tilde{a}}\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{G^*\mathrm{d}d\tan\alpha}{\pi\tilde{a}}\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{2G^*}{\pi R}\tan\alpha\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\tilde{a}, \quad r \le \tilde{a}. \tag{7}$$

Die gesamte Schubspannung am Ende des Indentierungsvorgangs ist damit

$$\tau(r;a) = \frac{2G^*}{\pi R}\tan\alpha\int_r^a\left(1-\frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\tilde{a} = \frac{2G^*}{\pi R}\tan\alpha\sqrt{a^2-r^2}. \tag{8}$$

Das gesamte Kontaktgebiet kann immer haften, falls

$$\tau(r) \le \mu p(r) \quad \Leftrightarrow \quad G^*\tan\alpha < E^*\mu. \tag{9}$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von dem in (a), weil sich die normale und tangentiale Steifigkeit des Flachstempelkontakts voneinander unterscheiden. Kraft und Verschiebung sind daher nicht parallel.