TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 05

Thema: Rigorose Behandlung des adhäsiven Kontaktproblems

Aufgabe 1: Adhäsion in Mikro-Elektromechanischen Systemen (MEMS)

Die Kräfte, die bei mikrotechnischen Systemen relevant sind, sind andere als bei „größeren" (konventionellen) Systemen. Das hängt damit zusammen, dass das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen größer wird, je kleiner die beteiligten Körper sind. Daher spielt Adhäsion in mikroelektromechanischen Systemen (MEMS) häufig eine große Rolle.
Im Folgenden soll eine typische Fragestellung untersucht werden, die im Zusammenhang mit der Auslegung von MEMS auftritt.
Wie lang darf der skizzierte schlanke Balken mit dem Elastizitätsmodul E höchstens sein, damit ein Kontakt (wie in der Skizze) verhindert wird?
Die effektive Oberflächenenergie zwischen Balken und Unterlage sei $\Delta\gamma$. Die Breite des Balkens (senkrecht zur Zeichenebene) sei a, die Dicke t.

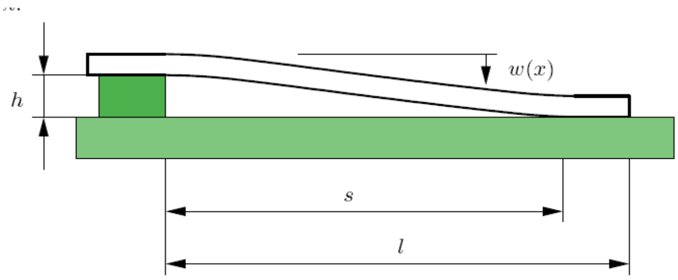

Abb. 1: Adhäsiver Kontakt eines mikromechanischen schlanken Balkens

Aufgabe 2: Alternative Betrachtung des JKR-adhäsiven Hertzschen Kontakts

Untersuchen Sie den adhäsiven Normalkontakt zwischen einem starren parabolischen Indenter mit dem Radius R und einem elastischen Halbraum mit dem effektiven E-Modul E^*; die spezifische Oberflächenenergie sei $\Delta\gamma$. Die Lösung des nicht-adhäsiven Problems lautet bekanntermaßen:

$$d^{n.a.}(a) = \frac{a^2}{R}, \quad F_N^{n.a}(a) = \frac{4}{3}E^*\frac{a^3}{R}, \quad U_{el}^{n.a.}(a) = \frac{8}{15}E^*\frac{a^5}{R^2}. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die elastische Energie als Funktion des Kontaktradius und der Eindrucktiefe d, wenn Indenter zunächst ohne Berücksichtigung der Adhäsion bis zum Kontaktradius a eingedrückt und anschließend das ganze Kontaktgebiet um Δl angehoben wird.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichts-Konfiguration aus dem Minimum der Gesamtenergie und zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$\Delta l(a) = \sqrt{\frac{2\pi a\Delta\gamma}{E^*}}. \tag{2}$$

Lösung Aufgabe 1:

Die Lösung der statischen Balkengleichung ohne Streckenlast, $w^{\mathrm{IV}}(x)=0$, mit den Randbedingungen

$$w(0)=0,\quad w'(0)=0,\quad w(s)=h,\quad w'(s)=0 \tag{3}$$

lautet

$$w(x)=h\left[3\left(\frac{x}{s}\right)^2-2\left(\frac{x}{s}\right)^3\right] \quad\Rightarrow\quad w''(x)=\frac{6h}{s^2}\left(1-\frac{2x}{s}\right). \tag{4}$$

Die gesamte in der Verformung gespeicherte elastische Energie ist damit

$$U_{el}=\frac{EI}{2}\int_0^s\left[w''(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{3Eat^3h^2}{2s^4}\int_0^s\left(1-\frac{2x}{s}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{Eat^3h^2}{2s^3}. \tag{5}$$

Die Gesamtenergie aus elastischer und Oberflächen-Wechselwirkung ist durch die Summe

$$U_{tot}=\frac{Eat^3h^2}{2s^3}+\Delta\gamma(s-l) \tag{6}$$

gegeben. Die Gleichgewichtskonfiguration (falls diese existiert) bestimmt sich durch die Bedingung

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial s}=0 \quad\Rightarrow s_G=\sqrt[4]{\frac{3Eh^2t^3}{2\Delta\gamma}}. \tag{7}$$

Falls $l > s_G$ kann der Balken an der Unterlage kleben (man beachte, dass s_G tatsächlich immer einem Minimum der Gesamtenergie entspricht).

Lösung Aufgabe 2:

(a) Die gesamte elastische Energie nach Abschluss des Indentierungsvorgangs beträgt

$$\begin{aligned}U_{el}&=U_{el}^{n.a.}-F_N^{n.a.}\Delta l+E^*a\Delta l^2,\quad \Delta l=d^{n.a.}-d=\frac{a^2}{R}-d,\\&=\frac{8}{15}E^*\frac{a^5}{R^2}-\frac{4}{3}E^*\frac{a^3}{R}\left(\frac{a^2}{R}-d\right)+E^*a\left(\frac{a^2}{R}-d\right)^2\\&=\frac{1}{5}E^*\frac{a^5}{R^2}-\frac{2}{3}E^*\frac{a^3d}{R}+E^*ad^2.\end{aligned} \tag{8}$$

(b) Das Gleichgewicht ergibt sich als Minimum der Gesamtenergie bei konstanter Eindrucktiefe:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U_{tot}}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{5}E^*\frac{a^5}{R^2}-\frac{2}{3}E^*\frac{a^3d}{R}+E^*ad^2-\pi a^2\Delta\gamma\right)=0\\&\Leftrightarrow E^*\left(\frac{a^2}{R}-d\right)^2-2\pi a\Delta\gamma=E^*\Delta l^2-2\pi a\Delta\gamma=0 \;\Rightarrow\; \Delta l(a)=\sqrt{\frac{2\pi a\Delta\gamma}{E^*}}.\end{aligned} \tag{9}$$