TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 04

Thema: Rigorose Behandlung des Normalkontaktproblems ohne Adhäsion

Die Spannungsverteilung für den Eindruck eines flachen, zylindrischen, starren Stempels vom Radius a_F in den elastischen Halbraum ist (siehe die Vorlesung)

$$p_F\left(r,\delta_F\right) = E^* \frac{\delta_F}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a_F^2-r^2}}, \quad \text{für} \quad 0<r<a_F. \tag{1}$$

Aufgabe 1: Hertzscher Kontakt

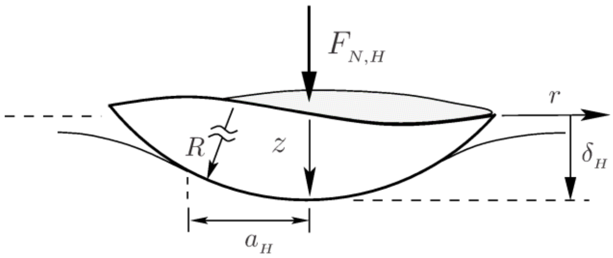

Abb. 1: Normalkontakt zwischen einem starren, parabolischen Profil und einem elastischen Halbraum

Mithilfe des Satzes von Maxwell und Betti soll aufbauend auf der Lösung (1) für den Flachstempelkontakt das klassische Hertzsche Kontaktproblem aus Abb. 1 gelöst werden. Gesucht sind die Zusammenhänge zwischen Normalkraft $F_{N,H}$, Eindrucktiefe δ_H und Kontaktradius a_H.

Nehmen Sie zunächst gleiche Kontaktflächen an $\left(a_F = a_H\right)$ und nutzen Sie die Tatsache aus, dass für alle axialsymmetrischen Normalkontaktprobleme die universelle Kontaktsteifigkeit gilt.

Aufgabe 2: Rigorose Lösung des konischen Kontaktes

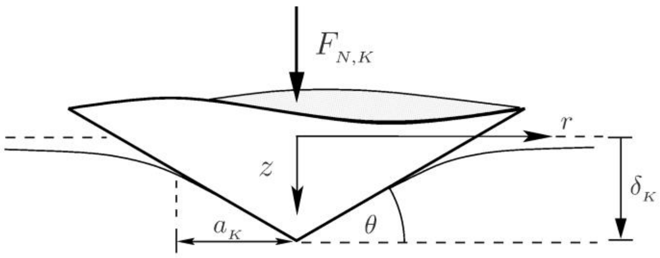

Abb. 2: Kontakt eines starren, konischen Indenters mit dem elastischen Halbraum

Mithilfe des Satzes von Maxwell und Betti soll aufbauend auf der Lösung für den Flachstempelkontakt das Kontaktproblem zwischen dem starren, konischen Indenter und dem elastischen Halbraum aus Abb. 2 gelöst werden. Gesucht sind die Zusammenhänge zwischen Normalkraft $F_{N,K}$, Eindrucktiefe δ_K und Kontaktradius a_K.

Lösung Aufgabe 1:

Der Satz von Maxwell und Betti liefert den Zusammenhang

$$\begin{aligned} &\int p_F u_H \mathrm{d}A = \int p_H u_F \mathrm{d}A \\ \Rightarrow 2E^* \delta_F &\int_0^{a_H} \left(\delta_H - \frac{r^2}{2R} \right) \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a_F^2 - r^2}} = \delta_F F_{N,H}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ausführen der Integration liefert unter der Annahme gleicher Kontaktgebiete die Beziehung

$$F_{N,H} = 2E^* \left(\delta_H a_H - \frac{a_H^3}{3R} \right). \tag{3}$$

Die Universalität der inkrementellen Kontaktsteifigkeit liefert außerdem

$$\begin{aligned} &2E^* a_H = k_N := \frac{\mathrm{d}F_{N,H}}{\mathrm{d}\delta_H} = 2E^* a_H + \left(\delta_H - \frac{a_H^2}{R} \right) \frac{\mathrm{d}a_H}{\mathrm{d}\delta_H} \\ &\Rightarrow a_H^2 = \delta_H R \qquad \Rightarrow F_{N,H} = \frac{4}{3} E^* \frac{a_H^3}{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Damit sind die Beziehungen zwischen den globalen Kontaktgrößen für das Hertzsche Kontaktproblem erfolgreich hergeleitet.

Lösung Aufgabe 2:

Der Satz von Maxwell und Betti liefert den Zusammenhang

$$\begin{aligned} &\int p_F u_K \mathrm{d}A = \int p_K u_F \mathrm{d}A \\ \Rightarrow 2E^* \delta_F &\int_0^{a_K} \left(\delta_K - r \tan\theta \right) \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a_F^2 - r^2}} = \delta_F F_{N,K}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ausführen der Integration liefert unter der Annahme gleicher Kontaktgebiete die Beziehung

$$F_{N,K} = 2E^* \left(\delta_K a_K - \frac{\pi}{4} \tan\theta a_K^2 \right). \tag{6}$$

Die Universalität der inkrementellen Kontaktsteifigkeit liefert außerdem

$$\begin{aligned} &2E^* a_K = k_N := \frac{\mathrm{d}F_{N,K}}{\mathrm{d}\delta_K} = 2E^* a_K + \left(\delta_K - \frac{\pi}{2} a_K \tan\theta \right) \frac{\mathrm{d}a_K}{\mathrm{d}\delta_K} \\ &\Rightarrow \delta_K = \frac{\pi}{2} a_K \tan\theta \qquad \Rightarrow F_{N,K} = \frac{\pi}{2} E^* a_K^2 \tan\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit sind die Beziehungen zwischen den globalen Kontaktgrößen für das Kontaktproblem erfolgreich hergeleitet.