TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2019/20 – UE 03

Thema: Kapillare Effekte in Kontakten

Aufgabe 1: Steighöhe in einer Kapillare

Wie hängt die Steighöhe in einer Kapillare (siehe Abb. 1) von der Oberflächenspannung γ und dem Kontaktwinkel θ (und der Erdbeschleunigung *g*, der Dichte der Flüssigkeit ρ sowie dem Radius der Kapillaren *r*) ab? Verwenden Sie das Grundgesetz der Hydrostatik und vernachlässigen Sie dabei die potentielle Energie der Flüssigkeit, welche sich oberhalb der Höhe *h* befindet.

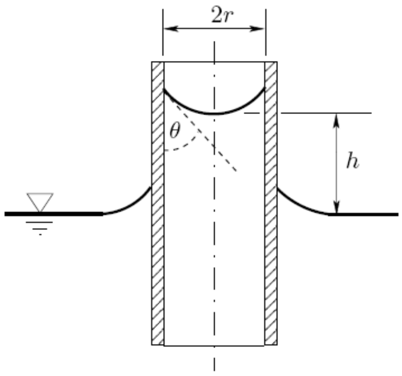

Abb. 1: Steighöhe in einer Kapillare

Aufgabe 2: Stift auf einer Wasseroberfläche

Ein zylindrischer Stift (Masse *m*, Länge *L*) liegt auf einer Wasseroberfläche (Oberflächenenergie *γ*, Abb. 2). Bestimmen Sie die maximale Gewichtskraft, die die Oberfläche in der Lage ist zu tragen, unter hydrophilen Bedingungen. Wie hängt die maximale Gewichtskraft vom Kontaktwinkel θ ab?

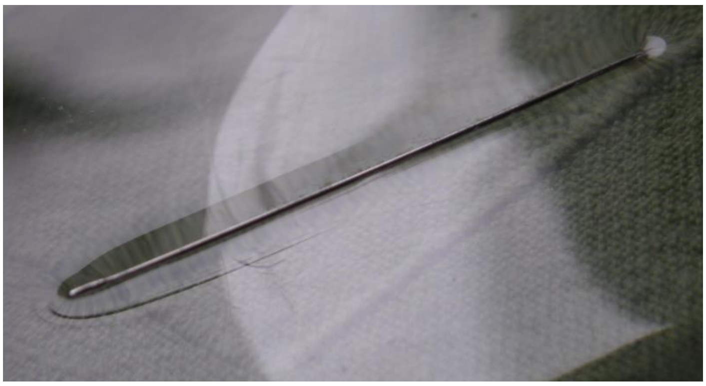

Abb. 2: Stift auf einer Wasseroberfläche.

Lösung Aufgabe 1:

Auf beiden Seiten der Flüssigkeitsoberflächen besteht ein Druckunterschied, wobei stets auf der „hohlen" Seite der größere Druck vorliegt. Nach der Young-Laplace-Gleichung ist der Unterschied:

$$\Delta p = \gamma_{12}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = -\frac{2\gamma_{12}}{R} \tag{1}$$

In dieser Gleichung wurde dabei vorausgesetzt, dass der Durchmesser des Röhrchens genügend klein ist, so dass man die Flüssigkeitsoberfläche als Kugelkalotte (Radius *R*) annehmen darf.
Aus dem hydrostatischen Grundgesetz folgt, dass in gleichen Höhen auch der gleiche Druck herrscht. Demnach muss auf der Flüssigkeitsseite der Grenzfläche der Druck p_F wirken:

$$p_F = p_0 - \rho g h \tag{2}$$

Es sei angemerkt, dass dieser Druck nur in guter Näherung überall auf der Flüssigkeitsseite der Grenzfläche gilt (Flüssigkeit oberhalb von *h* sollte nach Aufgabenstellung vernachlässigt werden). Daher:

$$\Delta p = p_F - p_0 = -\rho g h \tag{3}$$

Gleichsetzen von dieser Gleichung und der Laplace-Young-Gleichung (1) = (2) ergibt

$$h = \frac{2\gamma_{12}}{\rho g R} \tag{4}$$

Aus der Geometrie bestimmt man:

$$r = R\cos\theta \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{r}{\cos\theta} \tag{5}$$

Das wiederum ergibt eingesetzt

$$h(\theta,\gamma_{12}) = \frac{2\gamma_{12}\cos\theta}{\rho g r}. \tag{6}$$

Lösung Aufgabe 2:

Wir betrachten den Gleichgewichtszustand nach dem Einsinken (blau in der rechten Abbildung). Entlang der Grenzlinie Zylinder-Flüssigkeit-Luft befinden sich die drei Oberflächenenergien tangential zur Zylinderoberfläche immer im Gleichgewicht (durch die Einstellung des Kontaktwinkels, siehe Vorlesung).

Es entsteht also netto eine Kraft senkrecht zur Oberfläche aus der Oberflächenenergie des Wassers mit dem Betrag $\gamma_l L\sin\theta$. Gleichgewicht des Zylinders in vertikaler Richtung liefert dann die Beziehung

$$mg = 2\gamma_l L\sin\theta\cos\alpha. \tag{7}$$

Dabei ist geometrisch leicht zu sehen, dass der Winkel α nicht unter den Wert Null sinken kann (dieser Grenzfall ist in der Abbildung grün dargestellt). Die maximale Gewichtskraft ist damit

$$m_{\max} g = 2\gamma_l L\sin\theta. \tag{8}$$

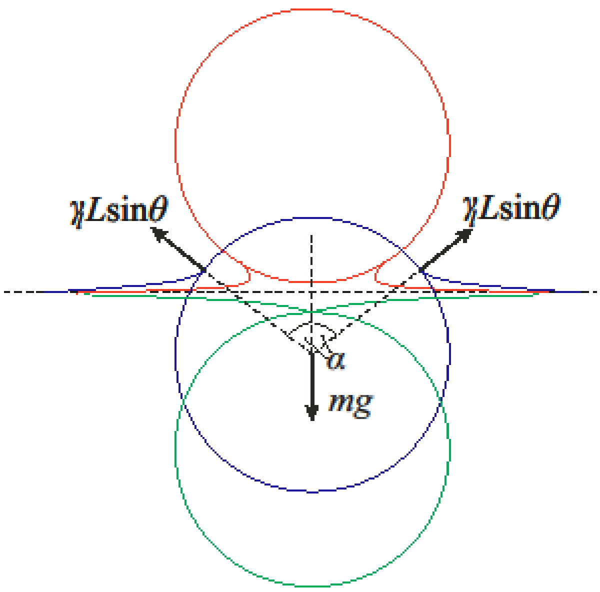

Abb. 3 Einsinken eines Zylinders in eine Wasseroberfläche. Rot: Beginn des Einsinkens, Blau: Gleichgewicht, Grün: Grenzfall des Gleichgewichts.