Das Prinzip der kleinsten Wirkung. Variationsrechnung

I. Beweis der Gültigkeit der Lagrangeschen Gleichungen

1). Äquivalenz der Newtonschen Gleichungen und der Lagrangeschen Gleichungen *in kartesichen Koordinaten* ist elementar zu beweisen, denn $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$ und $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$.

2). Die Lagrangesche Gleichungen sind äquivalent zum *Prinzip der kleinsten Wirkung.*

3). Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen die Lagrangesche Gleichungen *in beliebigen generalisierten Koordinaten.*

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

$L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)$

oder in abgekürzter Schreibweise $L(q, \dot{q})$ sei die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems.

Zu den Zeitpunkten $t=t_1$ und $t=t_2$ nehme das System bestimmte Lagen ein, die durch zwei Koordinatenkonfigurationen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ charakterisiert sind. Die Bewegung des Systems zwischen diesen beiden Lagen verläuft dann auf eine solche Weise, daß das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (1)$$

den kleinstmöglichsten Wert annimmt.

Das Integral S heißt **Wirkung.**

Variationsaufgabe: Bei welcher Bewegung hat das Integral (1) ein Minimum?

Lösung: Angenommen $q = q(t)$ sei eben die gesuchte Funktion. $\Rightarrow$ S wächst, wenn $q(t)$ durch eine beliebige Funktion der Form $q(t) + \delta q(t)$ ersetzt wird. $\delta q(t)$ heißt **Variation** der Funktion $q(t)$.

Die Änderung (Variation) von S ist gleich:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

In einem Minimum muss *die erste Variation* verschwinden:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) dt = 0$$

$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$, $\Rightarrow$ partielle Integration:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q dt = 0 .$$

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung ist

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 . \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

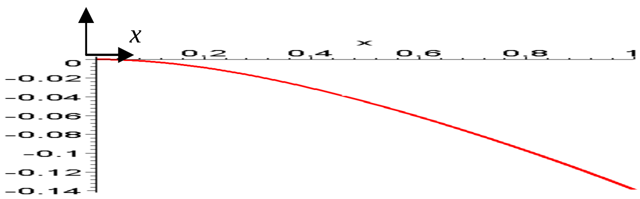
Bei mehreren Freiheitsgraden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

II. Variationsproblem für ein kontinuierliches Medium am Beispiel eines statisches Gleichgewichtes ("das Prinzip der kleinsten potentiellen Energie").

Ein System ist im stabilen statischen Gleichgewicht, wenn seine potentielle Energie U ein Minimum annimmt.

Beispiel 1. Zu bestimmen ist die Durchbiegung eines links fest eingespannten schweren Balkens (Parameter ρ, A, E, I, l, g).



Lösung: Die potentielle Energie eines Balkens im Schwerefeld ist

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx + g\int_0^l \rho A w(x)dx .$$

Die Bedingung für ein Minimum besteht im Verschwinden der ersten Variation der potentiellen Energie:

$$\delta U = \int_0^l EIw''(x)\cdot\delta w''(x)dx + g\int_0^l \rho A\cdot\delta w(x)dx$$

Im ersten Term führen wir zweimal eine partielle Integration aus:

$$\int_0^l EIw''(x)\cdot\delta w''(x)dx = EIw''(x)\cdot\delta w'(x)\Big|_0^l -$$

$$\int_0^l EIw'''(x)\cdot\delta w'(x)dx = EIw''(x)\cdot\delta w'(x)\Big|_0^l -$$

$$-EIw'''(x)\cdot\delta w(x)\Big|_0^l + \int_0^l EIw^{IV}(x)\cdot\delta w(x)dx$$

Somit

$$\delta U = g\int_0^l \rho A\cdot\delta w(x)dx + EIw''(x)\cdot\delta w'(x)\Big|_0^l -$$

$$-EIw'''(x)\cdot\delta w(x)\Big|_0^l + \int_0^l EIw^{IV}(x)\cdot\delta w(x)dx\,.$$

Daraus folgt

$g\rho A + EIw^{IV} = 0$ und

$w(0)=0$, $w'(0)=0$, $w''(l)=0$, $w'''(l)=0$.

Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt nicht nur die Biegedifferentialgleichung sondern auch die <u>*dynamischen Randbedingungen.*</u>

Integration ergibt (s. Bild oben).

$$w(x) = \frac{g\rho A l^4}{EI}\left[-\frac{1}{18}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

III. Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung zur Herleitung von Bewegungsgleichungen für einen elastischen Stab.

Beispiel 2. Der Stab sei am linken Ende fest eingespannt. Die Bewegungsgleichungen bekommt man aus der Forderung, daß die erste Variation des Wirkungsintegrals gleich Null ist:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\delta L dt = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l\left(\begin{array}{l}\rho A\dot{u}\delta\dot{u} - \\ -AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)\end{array}\right)dx\right\}dt$$

Im ersten Term führen wir eine partielle Integration nach der Zeit und im zweiten eine partielle Integration nach der Koordinate aus:

$$\delta S_1 = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho A\dot{u}\delta\dot{u}\cdot dxdt = \int_0^l \rho A\dot{u}\delta u\cdot dx\Bigg|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho A\ddot{u}\delta u\cdot dxdt$$

$$\delta S_2 = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l\left(-AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)\right)dx\right\}dt =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta u\Bigg|_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\delta u dx\right\}dt$$

Daraus folgt:

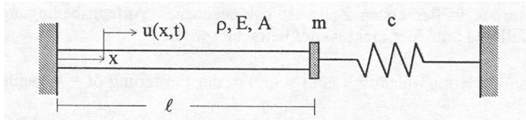
$$-\rho A\ddot{u} + AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \text{sowie}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\ .$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung liefert neben der *Bewegungsgleichung* auch die *Randbedingungen.*

Beispiel 3.

Gegeben sei der skizzierte Stab. An seinem freien Ende ist eine Masse und eine Feder angeheftet. Bei nicht gedehntem Stab sei die Feder entspannt. Man berechne die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen.



<u>*Lösung:*</u> Die Lagrangefunktion ist:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) - \frac{1}{2}cu^2(l,t) + \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{u}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l AEu'^2\,dx$$

Die Variation des Wirkungsintegrals:

$$\delta S = m\dot{u}(l,t)\delta u(l,t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_0^l \rho A\dot{u}\delta u dx\Bigg|_{t_0}^{t_1} +$$

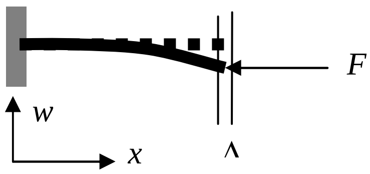
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\begin{array}{l}-(m\ddot{u}+cu)\delta u\big|_{x=l} - \int_0^l \rho A\ddot{u}\delta u dx + \\ \int_0^l EAu''\delta u dx - (EAu'\delta u)\Big|_{x=0}^{x=l}\end{array}\right\}dt$$

Daraus ergibt sich: $EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0$

u(0)=0 (feste Einspannung, $\delta u = 0$)

$EAu'(l,t) + m\ddot{u}(l,t) + cu(l,t) = 0$.

IV. Herleitung der Eulerschen "Knick-Gleichung".



Potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}w'^2 dx$$

Im Gleichgewicht hat die potentielle Energie ein Minimum. Die erste Variation muß verschwinden:

$$\delta U = \int_0^l EIw''\cdot\delta w'' dx - F\int_0^l w'\delta w' dx$$

Zweifache partielle Integration im ersten Glied und eine einmalige partielle Integration im zweiten Glied führen zum Ausdruck

$$\delta U = \int_0^l EIw^{IV}\cdot\delta w dx + F\int_0^l w''\delta w dx + \text{Randvariationen.}$$

Dies ist identisch gleich Null, wenn $EIw^{IV} + Fw'' = 0$, was nichts anderes ist als die Eulersche Knick-Gleichung. Die Randvariationen ergeben die Randbedingungen.