

**I. Rayleigh-Ritz Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen.**

**Beispiel 1.** Zu bestimmen ist die kleinste Eigenfrequenz einer Saite.

Mit Hilfe eines eingliedrigen Ansatzes  $u = a(t)\psi(x)$  erhalten wir die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{\dot{a}^2}{2} \rho A \int_0^l \psi^2(x) dx - \frac{a^2}{2} S \int_0^l \psi''^2(x) dx.$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{a} \cdot \rho A \int_0^l \psi^2(x) dx + a \cdot S \int_0^l \psi''^2(x) dx = 0.$$

Das ist eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{S \int_0^l \psi''^2(x) dx}{\rho A \int_0^l \psi^2(x) dx} \quad (\text{Rayleigh-Quotient}).$$

Wenn wir  $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$  wählen, dann ist

$$\omega^2 = \frac{S \frac{1}{2} l \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\rho A \frac{1}{2} l} = \frac{S}{\rho A} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Das ist das *exakte* Ergebnis für die kleinste Eigenfrequenz der Saite, da wir als Ansatzfunktion die exakte Eigenform genommen haben. Nehmen wir  $\psi(x) = x(l-x)$ , so bekommen wir  $\omega^2 = \frac{S}{\rho A} \frac{10}{l^2}$ , was etwa 1,3% über dem exakten Wert liegt.

Die Näherung ist immer größer als die erste Eigenfrequenz.

Mit einem zweigliedrigen Ansatz

$$\psi(x) = x(l-x) + ax^2(l-x)^2$$

erhalten wir für den Rayleigh-Quotienten

$$\omega^2 = \frac{S \int_0^l \psi''^2(x) dx}{\rho A \int_0^l \psi^2(x) dx} = \frac{6S(2a^2l^4 + 14al^2 + 35)}{\rho A l^2 (a^2l^4 + 9al^2 + 21)}$$

Dieser Ausdruck hat ein Minimum bei

$$a := \frac{-7 + \sqrt{133}}{4l^2}$$

Der minimale Wert ist gleich

$$\omega^2 = 9,8697 \frac{S}{\rho A} \frac{1}{l^2}$$

Vergleiche mit dem exakten Wert

$$\omega^2 = 9,8696 \frac{S}{\rho A} \frac{1}{l^2}.$$

**II. Statisches Gleichgewicht und seine Stabilität**

Ein System mit der potentiellen Energie  $U(q_1, \dots, q_s)$  ist dann im statischen Gleichgewicht, wenn  $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$  für alle  $i$ .

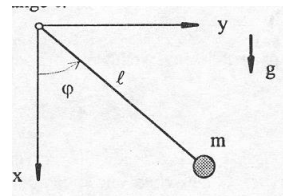
Ein Gleichgewicht ist *stabil*, wenn es einem *Minimum* der potentiellen Energie entspricht und *instabil* in allen anderen Fällen.

Im *eindimensionalen* Fall ist das Stabilitätskriterium besonders einfach:

$U$  hat ein Minimum, wenn  $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$  (stabil)

$U$  hat ein Maximum, wenn  $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$  (instabil).

**Beispiel 2.** Gegeben sei ein mathematisches Pendel (Masse  $m$  auf einem masselosen Stab der Länge  $l$ ). Man bestimme die Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität.



Lösung: Mit  $U = -mgl \cos \varphi$  berechnet man die Gleichgewichtslagen

aus der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi = 0. \text{ Sie hat zwei Lösungen:}$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \pi.$$

Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach  $\varphi$  gibt Auskunft über Stabilität:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgl \cos \varphi.$$

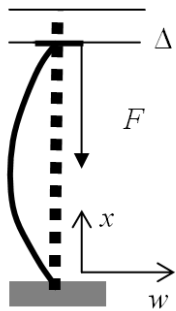
$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} > 0 \Rightarrow \text{stabiles Gleichgewicht.}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_2} < 0 \Rightarrow \text{instabiles Gleichgewicht}$$

**Beispiel 3.** Knickung eines Stabes.

Ein elastischer Stab sei an seinen Enden gelenkig gelagert und in der vertikalen Rich-

tung mit einer Kraft  $F$  belastet. Gegeben:  $E, I, l, F$ . Zu bestimmen sind die Stabilitätsbedingungen.



**Lösung:** Vorbereitender Schritt: Berechnung der potentiellen Energie:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w''(x))^2 dx - F \Delta$$

Bestimmen wir die Verschiebung  $\Delta$ . Die Verkürzung wegen vertikaler Verschiebung ist  $\Delta$ .

Die Verlängerung wegen Biegung ist

$$\int_0^l \frac{1}{2} w'^2 dx.$$

Die Längssteifigkeit eines schlanken Stabes ist viel größer als seine Biegesteifigkeit: In erster Annäherung kann der Stab als undeformbar angenommen werden. Das bedeutet, daß sich die Länge bei einer Auslenkung nicht ändert:  $\Delta = \int_0^l \frac{1}{2} w'^2 dx$ .

Für die potentielle Energie ergibt sich

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx - F \int_0^l \frac{1}{2} w'^2 dx \quad (1)$$

Mit dem Ansatz  $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}$

(der den Randbedingungen  $w(0) = 0$ ,  $w(l) = 0$  genügt), bekommen wir

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{\pi n}{l} \right) \cos \frac{\pi n x}{l}$$

$$w''(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie:

$$U = \frac{l}{4} EI \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 - \frac{Fl}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2$$

$$= \frac{l}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left[ EI \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 - F \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \right]$$

Diese Energie hat bei  $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$  ein Minimum, wenn alle Koeffizienten vor  $a_n^2$

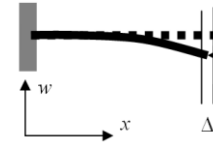
positiv sind:  $EI \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 - F \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 > 0$  oder

$$EI \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 - F > 0.$$

Der gerade Zustand ist stabil, wenn

$$F < EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^2$$

#### IV. Rayleigh-Ritz-Verfahren zur Bestimmung von Knicklasten.



Die potentielle Energie eines wie gezeigt belasteten Stabes ist mit (1)

gegeben. Wenn wir einen eingliedigen Ansatz  $w = a\psi(x)$  benutzen, so bekommen wir:

$$U = a^2 \left( \frac{1}{2} \int_0^l EI \psi''^2 dx - F \int_0^l \frac{1}{2} \psi'^2 dx \right).$$

Die potentielle Energie hat bei  $a = 0$  ein Minimum (stabiles Gleichgewicht), wenn

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI \psi''^2 dx - F \int_0^l \frac{1}{2} \psi'^2 dx > 0.$$

Für die kritische Last bekommen wir daraus

$$F = \frac{\int_0^l EI \psi''^2 dx}{\int_0^l \psi'^2 dx} \quad (\text{Rayleigh-Quotient}) \quad (2)$$

Die exakte Knicklast ist immer kleiner als eine Abschätzung der Form (2)!

**Bemerkung:** Die Ansatzfunktionen müssen stets die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Die dynamischen Randbedingungen brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Das Ergebnis wird allerdings verbessert, wenn auch die dynamischen Randbedingungen berücksichtigt werden.

**Numerisches Beispiel:** Im 1. Eulerschen Knickfall ist  $F_k = \pi^2 EI / 4l^2 = 2,467 (EI / l^2)$

Benutzen wir einen eingliedigen Ansatz  $\psi = x^2$ , so ergibt sich für die Knicklast:

$$F_k = EI \frac{4l}{\int_0^l 4x^2 dx} = 3 (EI / l^2).$$

Mit einem zweigliedrigen Ansatz

$\psi = x^2 + ax^3$ :

$$F_k = EI \frac{1}{a} \frac{\frac{1}{18} (2 + 6al)^3 - \frac{4}{9}}{\frac{2}{5} a^2 l^5 + 3al^4 + \frac{4}{3} l^3}.$$

$$\frac{dF_k}{da} = \frac{180(18a^2 l^2 + 22al + 5)}{l(27a^2 l^2 + 45al + 20)} = 0$$

$$\frac{a}{l} = -\frac{11}{18} + \frac{\sqrt{31}}{18}.$$

$$F_k = 2.485 (EI / l^2) \quad (\text{Genauigkeit } 0.7\%)$$