Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 7. **Näherungslösungen auf der Basis von Prinzipien. Das Verfahren von Rayleigh-Ritz.** **Literatur: Ostermeyer §25.2**

I. Ritz-Ansatz (Statik)

Mehrere statische und dynamische Aufgaben mit Stäben und Balken haben wir gelöst, indem wir die Auslenkung als eine Fourier-Reihe dargestellt haben. Allgemeiner kann man eine Entwicklung der Form

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\varphi_n(x) \qquad (1)$$

benutzen, wobei $\varphi_n(x)$ ein *voller* Satz von Basisfunktionen ist.

Wir haben gesehen, dass man oft sehr gute Ergebnisse bereits mit nur wenigen ersten Gliedern der Entwicklung (1) bekommt.

Meistens reicht es, statt einer unendlichen Reihe einen *endlichen Ansatz*

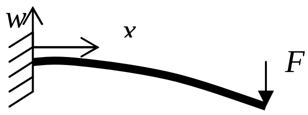
$$w(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x) \qquad (2)$$

zu benutzen (***Ritz-Ansatz***).

Bemerkung 1: Die Ansatzfunktionen müssen die geometrischen Randbedingungen erfüllen.

Bemerkung 2: Bisher haben wir Fourier-Reihen benutzt, bei denen die Basis-Funktionen $\varphi_n(x)$ den Ortogonalitätsbedingungen genügten. Das ist zwar sehr bequem, aber nicht zwingend erforderlich.

Beispiel 1. Zu bestimmen ist die Form eines links fest eingespannten Balkens, auf dessen rechten Ende eine konzentrierte Kraft F wirkt.



Lösung: Benutzen wir den Ansatz:

$$w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_2x^2+a_3x^3$$

(Aus den geometrischen Randbedingungen links folgt $a_0=0$, $a_1=0$).

Zweite Ableitung: $w''(x)=2a_2+6a_3x$

Die potentielle Energie ist:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2dx+Fw(l) \text{ ist gleich}$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(2a_2+6a_3x\right)^2dx+F(a_2l^2+a_3l^3)$$

$$U=EI\left(2a_2^2l+6a_2a_3l^2+6a_3^2l^3\right)+F(a_2l^2+a_3l^3)$$

Die Bedingungen für ein Minimum lauten

$$\left.\begin{aligned}4a_2+6a_3l&=-\frac{Fl}{EI}\\ 6a_2+12a_3l&=-\frac{Fl}{EI}\end{aligned}\right\}$$

Die Durchbiegung ist

$$w(x)=-\frac{Fl}{2EI}x^2+\frac{F}{6EI}x^3$$

Die Durchbiegung im Endpunkt ist

$w(l)=-\dfrac{Fl^3}{3EI}$. (Das ist das *exakte* Ergebnis!)

<u>Allgemeine Formulierung.</u> Wir betrachten dieselbe Aufgabe mit einem links eingespannten Balken, jetzt aber mit einer beliebigen Streckenlast $q(x)$. Zu bestimmen ist die Form des Balkens im Gleichgewicht. Die potentielle Energie des Balkens

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2dx+\int_0^l q(x)w(x)dx$$

muss im Gleichgewicht minimal werden. Berechnen wir U mit dem Ansatz (2):

$$w''(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n''(x),$$

$$\left(w''(x)\right)^2=\sum_{n,k=0}^{N}a_na_k\varphi_n''(x)\varphi_k''(x)$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{N}a_na_k\varphi_n''(x)\varphi_k''(x)dx+$$

$$+\int_0^l q(x)\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi_n(x)dx$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\int_0^l\varphi_n''(x)\varphi_k''(x)dx=A_{nk}\,,\quad \int_0^l q(x)\varphi_n(x)dx=b_n$$

Offensichtlich gilt $A_{nk}=A_{kn}$.

Die potentielle Energie erhält die Form:

$$U=\frac{1}{2}EI\sum_{n,k=0}^{N}A_{nk}a_na_k+\sum_{n=0}^{N}b_na_n\,.$$

Die Bedingung für ein Minimum ist

$$\frac{\partial U}{\partial a_n}=EI\sum_{k=0}^{N}A_{nk}a_k+b_n=0\,.$$

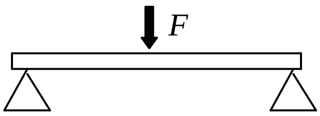
oder in Matrix-Form $EI\mathbf{A}\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich daraus zu

$$\mathbf{a}=-\frac{1}{EI}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,,$$

d.h. die Aufgabe über die Gleichgewichtsform eines Balkens wird mit Hilfe des Ritzschen Ansatzes auf Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems zurückgeführt.

Beispiel 2. Zu berechnen ist die Durchbiegung des unten gezeigten Balkens in der Mitte. (Gegeben: *l*,*E*,*I*).



<u>*Lösung:*</u> Wir haben diese Aufgabe bereits mit Hilfe einer unendlichen Fourier-Reihe exakt gelöst. Jetzt benutzen wir einen Ritz-Ansatz in Form eines Polynoms vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} w(x) &= ax(l-x) + bx^2(x-l)^2 \\ &= a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) \end{aligned} . \qquad (*)$$

Die potentielle Energie ist gleich

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx + Fw(l/2)$$

Mit dem Ansatz (*) erhält man

$$w(l/2) = a\left(l/2\right)^2 + b\left(l/2\right)^4 .$$

Es ist leicht zu prüfen, dass gilt

$$\int_0^l \varphi_1''^2(x)dx = 4l\ , \quad \int_0^l \varphi_2''^2(x)dx = \frac{4}{5}l^5 \ \text{, und}$$

$\int_0^l \varphi_1''(x)\varphi_2''dx = 0$. Für die potentielle Energie ergibt sich somit

$$U = 2EIl\left(a^2 + \frac{1}{5}b^2l^4\right) + F\left(a\left(\frac{l}{2}\right)^2 + b\left(\frac{l}{2}\right)^4\right).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 4EIla + \frac{F}{4}l^2 = 0 \qquad a = -\frac{F}{16}\frac{l}{EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = \frac{4}{5}EIl^5b + \frac{F}{16}l^4 = 0 \qquad b = -\frac{5}{4}\frac{F}{16}\frac{1}{EIl}$$

Die Durchbiegung in der Mitte ist somit

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = -\left(\frac{63}{64}\right)\frac{Fl^3}{48\cdot EI} .$$ (Fehler ca. 1.5%).

II. Ritz-Ansatz (Dynamik)

Betrachten wir eine vorgespannte Saite.

Das System ist mittels des Ritz-Ansatzes zu diskretisieren und Bewegungsgleichungen der Saite sind aufzustellen.

<u>*Lösung:*</u> Wir benutzen den Ritz-Ansatz:

$$w(x,t) = \sum_k^N a_k(t)\varphi_k(x) .$$

Die Lagrangefunktion einer Saite ist

$$L = \int_0^l \rho A\frac{\dot{w}^2}{2}dx - \frac{S}{2}\int_0^l w'^2 dx .$$

Mit den Bezeichnungen

$$\rho A\int_0^l \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = m_{nk}\ ,\ S\int_0^l \varphi_n'(x)\varphi_k'(x)dx = c_{nk}$$

erhalten wir

$$L = \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{2}m_{nk}\dot{a}_n\dot{a}_k - \sum_{n,k=1}^N \frac{1}{2}c_{nk}a_na_k$$

Die Lagrangegleichungen bezüglich der Variablen a_n lauten

$$\sum_{k=1}^N m_{nk}\ddot{a}_k + \sum_{k=1}^N c_{nk}a_k = 0$$

oder in der Matrix-Form

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
Die Aufgabe über die Bewegung einer Saite wird somit auf ein System von *N* gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt, die mit Hilfe eines Exponentialansatzes gelöst werden können.

M nennt man *Massenmatrix*, **C** *Steifigkeitsmatrix.*

<u>Beispiel 3.</u> *Zu bestimmen ist die kleinste Eigenfrequenz einer Saite.*

<u>*Lösung:*</u> Nehmen wir den Ritz-Ansatz mit nur *einer* Funktion: $u = a(t)\psi(x)$.

Die Lagrangefunktion ist gleich

$$L = \frac{\dot{a}^2}{2}\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx - \frac{a^2}{2}S\int_0^l \psi'^2(x)dx$$

Die Lagrangesche Gleichung ist

$$\ddot{a}\cdot\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx + a\cdot S\int_0^l \psi'^2(x)dx = 0$$

Das ist eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{S\int_0^l \psi'^2(x)dx}{\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx}$$ (Rayleigh-Quotient).

Wenn wir $\psi(x) = \sin\left(\pi x/l\right)$ wählen, dann ist

$$\omega^2 = \frac{Sl\left(\frac{\pi}{l}\right)^2/2}{\rho Al/2} = \frac{S}{\rho A}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 .$$

Das ist das *exakte* Ergebnis!

Bei einer beliebigen anderen Ansatzfunktion wird die berechnete Eigenfrequenz *größer* als die exakte sein.