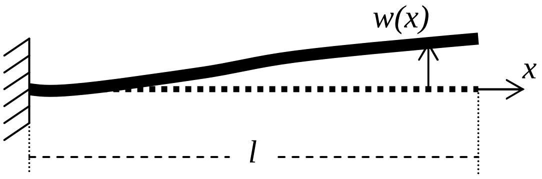
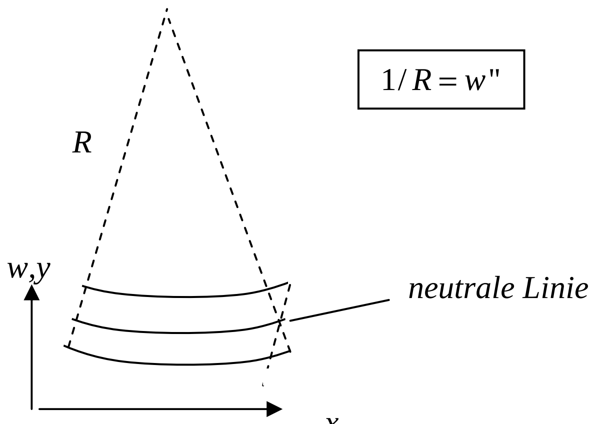
Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 6.
Potentielle und kinetische Energie eines elastischen Balkens, eines Torsionsstabes, einer gespannten Saite. Beispiele für Statik und Dynamik eines Balkens.

I. Energie eines Balkens



Gegeben sei ein Balken mit der Länge l, dem geometrischen Trägheitsmoment des Querschnitts I und dem Elastizitätsmodul E in einem deformierten Zustand, der durch die Querverschiebung $w(x)$ seiner Achse gegeben ist. Zu bestimmen ist seine potentielle Energie.

Wir betrachten einen infinitesimal kleinen Ausschnitt aus dem Balken:



Aus der vorigen Vorlesung wissen wir, dass potentielle Energie eines gedehnten Stabes

$$U = \frac{AE}{2}\varepsilon^2 l = \frac{E}{2}\varepsilon^2 \cdot V$$ ist (V ist Volumen).

Deformation einer "Faser" mit der Querkoordinate y (gemessen von der Mittellinie) ist $\varepsilon(y) = -y/R = -y \cdot w''$. Die potentielle Energie ist gleich:

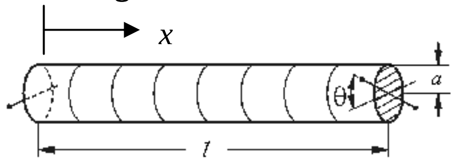
$$U = \int_0^l dx \iint \frac{E}{2}\varepsilon(y)^2 dydz = \frac{1}{2}\int_0^l dx \iint E y^2 w''^2(x) dydz$$

oder

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x)dx}$$

Die kinetische Energie berechnet sich wie bei einem Stab zu: $\boxed{K = \int_0^l \rho A \frac{\dot{w}^2}{2} dx}$

II. Energie eines Torsionsstabes



Wir schneiden aus einem verdrehten Stab ein infinitesimal kleines Element zwischen x und $x+dx$. Der linke Rand ist gedreht um den Winkel $\theta(x)$, der rechte um $\theta(x+dx) = \theta + d\theta$. Das Torsionsmoment im Querschnitt ist gleich

$M = GI_r \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x} = GI_r\theta'$ (I_r ist das polare geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts). Der Torsionssteifigkeitskoeffizient des Elementes ist $k = GI_r/\Delta x$. Die potentielle Energie des Elementes ist

$$\Delta U = k\frac{\Delta\theta^2}{2} = G\frac{I_r}{\Delta x}\frac{\Delta\theta^2}{2} = G\frac{I_r}{2}\frac{\Delta\theta^2}{\Delta x^2}\Delta x = \frac{GI_r}{2}\theta'^2\Delta x$$

Potentielle Energie des gesamten Stabes ist

$$\boxed{U = \int_0^l \frac{GI_r}{2}\theta'^2 dx}.$$

Die kinetische Energie eines Elementes ist:

$$\Delta K = \sum_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnitt}}} \frac{\Delta m v^2}{2} = \sum_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnitt}}} \frac{\rho \cdot \Delta x\Delta y\Delta z \cdot r^2\dot{\theta}^2}{2}$$

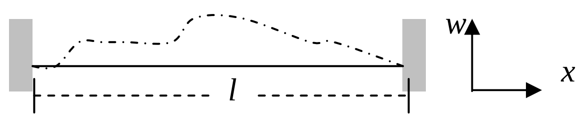
$$= \Delta x \sum_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnitt}}} \frac{\rho \cdot \Delta y\Delta z \cdot r^2\dot{\theta}^2}{2} = \Delta x \frac{\rho}{2}\dot{\theta}^2 \int_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnit}}} r^2 dydz$$

$= \Delta x \dfrac{\rho I_r}{2}\dot{\theta}^2$. Die gesamte kinetische Energie:

$$\boxed{K = \int_0^l \frac{\rho I_r}{2}\dot{\theta}^2 dx}$$

III. Energie einer gespannten Saite

Saite ist ein vorgespannter Faden, der keine Biegesteifigkeit besitzt.



Wir nehmen einen elastischen Faden mit der Länge l_0 im ungespannten Zustand und dehnen ihn um Δl_0 auf eine neue Länge $l = l_0 + \Delta l_0$; dadurch entsteht eine Spannkraft $S = c\Delta l_0$ (c ist der Steifigkeitskoeffizient).

Jetzt lenken wir die Saite aus diesem Zustand aus (Verschiebung in der Querrichtung $w(x)$). Dadurch dehnt sich der Faden auf die Länge

$$l' = \int_0^l \sqrt{1+w'^2}\,dx = \int_0^l \left(1+\frac{w'^2}{2}+G.h.O.\right)dx$$

$$\approx l + \int_0^l \frac{w'^2}{2}dx = l_0 + \Delta l_0 + \int_0^l \frac{w'^2}{2}dx = l_0 + \Delta l_0 + \Delta l_1$$

Die potentielle Energie vor der Auslenkung war $U_1 = \frac{c}{2}\Delta l_0^{\ 2}$. Nach der Auslenkung:

$$U_2 = \frac{c}{2}\left(\Delta l_0 + \Delta l_1\right)^2 = \frac{c}{2}\left(\Delta l_0^{\ 2} + 2\Delta l_0 \Delta l_1 + G.h.O.\right)$$

$U = U_2 - U_1 = c\Delta l_0 \Delta l_1 = S\Delta l_1$ oder

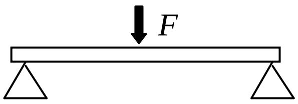
$$\boxed{U = \frac{S}{2}\int_0^l w'^2 dx}.$$

Sie hängt nicht von der Steifigkeit des Fadens, sondern nur von der Vorspannkraft S ab. Die kinetische Energie ist wie beim Balken

$$\boxed{K = \int_0^l \rho A \frac{\dot{w}^2}{2} dx.}$$

IV. Ein Balken im statischen Gleichgewicht: ein Beispiel.

Zu berechnen ist die Durchbiegung in der Mitte.



Lösung: Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx + Fw(l/2)$$

Mit dem Ansatz $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l}$, (der den Randbedingungen $w(0)=0$, $w(l)=0$ genügt), bekommen wir

$$w''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{EIl}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 + F\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Die Bedingungen für ein Gleichgewicht:

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} = \frac{EIl}{2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 a_n + F\cdot\sin\frac{\pi n}{2} = 0$$

Daraus folgt $a_n = -\left(2Fl^3 \sin\frac{\pi n}{2}\right) / \left(EI\pi^4 n^4\right)$.

Die Durchbiegung in der Mitte ist somit

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2Fl^3 \sin^2\frac{\pi n}{2}}{EI\pi^4 n^4} =$$

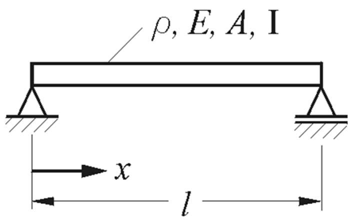
$$-\frac{2Fl^3}{EI\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = -\frac{Fl^3}{48\cdot EI}.$$

$$\left(\textit{berücksichtige}: \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\right)$$

V. Dynamik eines Balkens

Gegeben sei ein beidseitig drehbar gelagerter Balken. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen.

Lösung: Die Querauslenkung des Balkens genügt den Randbedingungen $w(0)=0$, $w(l)=0$ und kann daher als folgende Fourier-Reihe dargestellt werden:



$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Als generalisierte Koordinaten wählen wir a_n. Die zur Berechnung von Energien benötigten Ableitungen sind:

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$w''(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Kinetische und potentielle Energien:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{n,k=1}^{\infty} \rho A \dot{a}_n \dot{a}_k \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi k x}{l} dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A \dot{a}_n^2 l}{4}$$

$$U = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} EIa_n^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 l$$

Die Lagrangefunktion:

$$L = l\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A \dot{a}_n^2}{4} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} EIa_n^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\right).$$

Die Lagrangegleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n} - \frac{\partial L}{\partial a_n} = 0 \quad \text{oder}$$

$\boxed{\rho A \ddot{a}_n + EIa_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 = 0}$. Diese Gleichungen beschreiben Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho A}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4$. $\boxed{\omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}$