Prinzip der virtuellen Arbeit (Prinzip der virtuellen Verrückungen)

I. Kraft als Gradient der potentiellen Energie. Aus Mechanik II wissen Sie, dass potentielle Energie bei einer eindimensionalen Bewegung als Integral $U(x) = -\int F(x)dx$ definiert wird. Aus dieser Definition folgt, dass $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$ gilt. Die Verallgemeinerung dieser Beziehung auf mehrere Freiheitsgrade lautet:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

II. Prinzip der virtuellen Arbeit (Prinzip der virtuellen Verrückungen)

Im statischen Gleichgewicht sind alle Kräfte gleich Null. Falls wir es mit einem konservativen System zu tun haben, gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0. \qquad (1)$$

Dies sind aber die Bedingungen für ein Minimum der potentiellen Energie. Gleichungen (1) bedeuten, dass das erste Differential der potentiellen Energie verschwindet:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + \ldots = 0 \quad \text{oder}$$

$$dW = F_{x1}dx_1 + F_{x2}dx_2 + \ldots = 0$$

Im Gleichgewicht ist die Arbeit bei beliebigen virtuellen Verschiebungen gleich Null.

Umgekehrt:

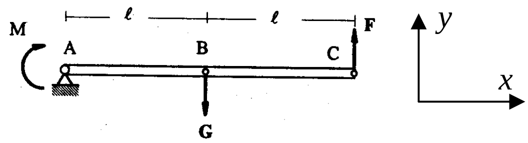
Wenn die Arbeit bei beliebigen virtuellen Verschiebungen gleich Null ist, so ist das System im Gleichgewicht

Da die *Zwangskräfte (Reaktionskräfte)* keine Arbeit leisten, brauchen sie bei der Berechnung der Arbeit nicht berücksichtigt zu werden. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wird daher meistens in der folgenden Form verwendet:

Im Gleichgewicht muss die ***Arbeit von allen Kräften ohne Berücksichtigung von Reaktionskräften*** *auf* ***allen mit den Bindungen verträglichen*** *Bewegungen verschwinden.*

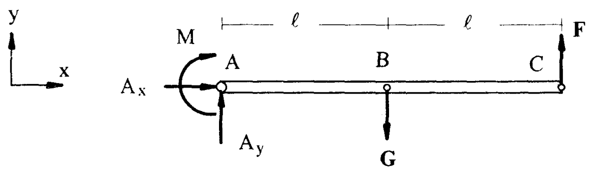
III. Beispiele für das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Beispiel 1. Gegeben sei ein Hebel der Länge *2l* im statischen Gleichgewicht. Im Punkt A ist der Hebel gelagert. Am Hebel greifen die Kräfte F und G sowie ein Moment M wie skizziert an.

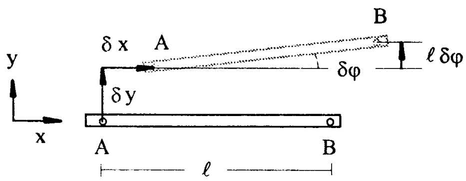


M und **G** sind gegeben. Zu bestimmen ist die Kraft **F** und die Auflagerreaktionen.

Um die virtuelle Arbeit bei beliebigen virtuellen Verrückungen des Hebels zu erhalten, muß zunächst der Hebel vom Lager freigeschnitten werden, um alle Kräfte am Hebel



sichtbar zu machen. Jetzt nehmen wir eine kleine, aber ansonst beliebige Verschiebung des Hebels vor. Ein starrer Körper in einer Ebene hat nur drei Freiheitsgrade: Er kann nach oben um δy, in horizontaler Richtung um δx verschoben werden und darüber hi-



naus um einen Winkel $\delta\varphi$ gedreht werden, sagen wir um das linke Ende des Hebels.

Virtuelle Verrückungen: $\delta x, \delta y, \delta\varphi$.
Die auf der virtuellen Verrückung geleistete Arbeit muss im Gleichgewicht verschwinden:

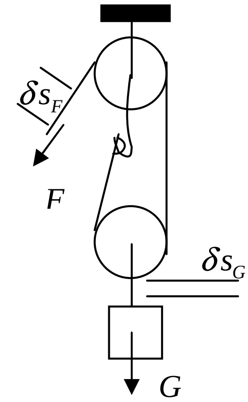
$$\delta W = A_x\delta x + (A_y - G + F)\delta y + (-lG + 2lF - M)\delta\varphi = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichgewichtsbedingungen:

$$A_x = 0, \qquad A_y - G + F = 0,$$

$$-lG + 2lF - M = 0.$$

Beispiel 2. Flaschenzug.
Bei gegebener Gewichtskraft G ist die Kraft F zu bestimmen.

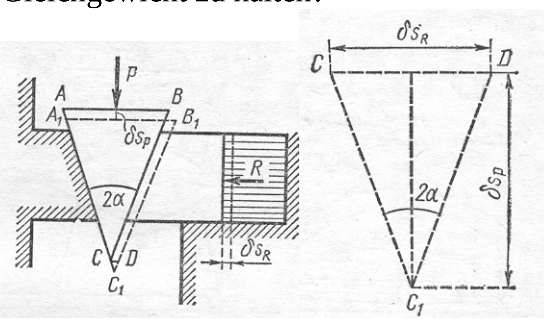


Lösung: Das ist ein System mit einem Freiheitsgrad. Das Ende des Seils wird um δs_F gezogen. Dabei hebt sich das Gewicht um $\delta s_G = \delta s_F / 2$. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$\delta A = F\delta s_F - G\delta s_G$$
$$= \left(F - G/2\right)\delta s_F \; .$$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit bei einer beliebigen Verschiebung gleich Null ist: $F - G/2 = 0$.

Beispiel 3. Welche horizontale Kraft muss an den Keil angelegt werden, um das System im Gleichgewicht zu halten?



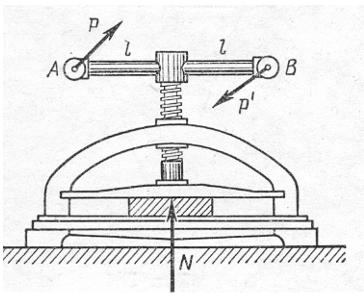
Lösung: $\delta s_R = 2\delta s_p \tan\alpha$

Die virtuelle Arbeit muss verschwinden:

$$\delta W = P\delta s_P - R\delta s_R = \left(P - 2R\tan\alpha\right)\delta s_p = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{P}{2\tan\alpha}}.$$

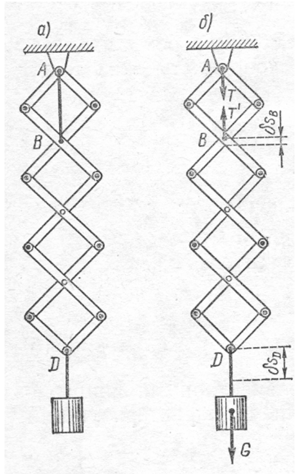
Beispiel 4. Schraubenpresse. Zu bestimmen ist das zum Erzeugen einer Druckkraft N erforderliche Kraftmoment des Kräftepaars P, P'.



$$\delta s_N / h = \delta\varphi / 2\pi$$
$$\delta W = M\,\delta\varphi - N\,\delta s_N$$
$$= \left(M - \frac{h}{2\pi}N\right)\delta\varphi = 0$$
$$M = \frac{h}{2\pi}N$$

IV. Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Reaktionskräfte.

Ist nach einer bestimmten Reaktionskraft in einem Konstruktionselement gefragt, so ersetzen wir nur die uns interessierende Bindung durch die Reaktionskräfte und geben ihr ansonsten die Möglichkeit, sich zu bewegen (virtuelle Verrückungen auszuführen).

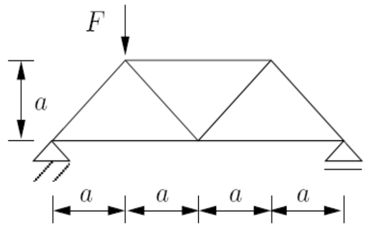


Beispiel 5. Zu berechnen ist die Spannkraft des Fadens AB in dem skizzierten Teufelsarm.
Lösung: Wir "schneiden" den Faden und lassen das Gewicht G eine kleine Verschiebung δs_D ausführen. Dabei verschiebt sich der Punkt B um $\delta s_B = \delta s_D / 4$. Die dabei geleistete Arbeit muss im Gleichgewicht verschwinden:

$$\delta W = -T' \cdot \delta s_B + G \cdot \delta s_D = 0$$

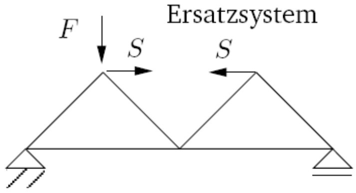
Daraus folgt $\boxed{T = 4G}$.

Beispiel 6. Stabkraft
Wie groß ist die Stabkraft im Obergurt des Fachwerks?

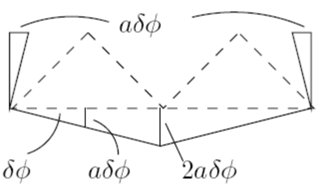


Lösung: Indem man den Stab herausnimmt und durch die gesuchte Stabkraft ersetzt, entsteht ein verschiebliches System mit einem Freiheitsgrad (z.B., ϕ), durch den alle anderen virtuellen Verschiebungen ausgedrückt werden können.

Ersatzsystem



Virtuelle Verschiebungen der Lastangriffspunkte



Die virtuelle Arbeit muss verschwinden:

$$\delta W = Fa\delta\phi + Sa\delta\phi$$
$$+ Sa\delta\phi = 0$$

$$\Rightarrow \; S = -\tfrac{1}{2}F \; .$$