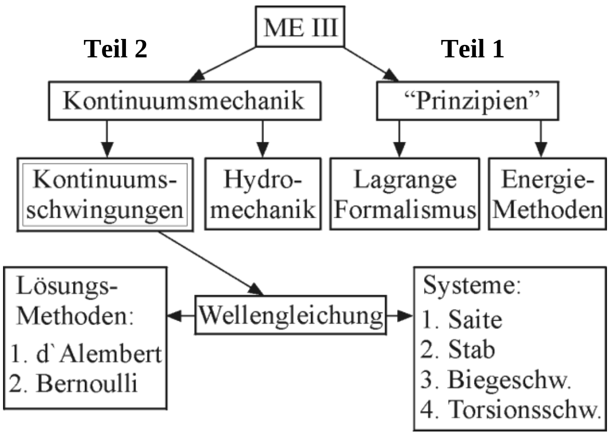
Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 1.

Generalisierte Koordinaten, Lagrangefunktion, Lagrangegleichungen II. Art

- Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik 3 (Abschnitt 4.3 Lagrangesche Gleichungen)
- Schnell, Gross, Hauger: Technische Mechanik 2 (Kapitel 6)
- G.-P. Ostermeyer: Mechanik III



I. Verallgemeinerte Koordinaten

*Wenn die Gesamtheit irgendwelcher Größen $q_1, q_2, ..., q_s$ die Lage eines Systems (mit s Freiheitsgraden) völlig charakterisiert, so nennt man diese Größen **verallgemeinerte (oder generalisierte) Koordinaten** und die Ableitungen $\dot{q}_i$ **verallgemeinerte Geschwindigkeiten.***

***Wichtig:** Verallgemeinerte Koordinaten müssen nichts mit den uns bereits bekannten kartesischen oder polaren Koordinaten zu tun haben. Das können beliebige Größen sein (Volumen, Spannung, elektrische Kapazität oder Ladung, aber auch Winkel, Abstände usw.).*

II. Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion eines Systems von Massenpunkten

$$L \equiv K - U =$$

= kinetische Energie – potentielle Energie =

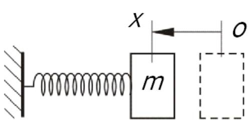
$$\sum_a \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...) = L(\{\dot{q}_i\}, \{q_i\})$$

Bemerkung: Die potentielle Energie ist bis auf eine additive Konstante definiert. Diese Eigenschaft hat auch die Lagrange-Funktion.

III. Lagrangesche Gleichungen II. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Beispiel 1. Gegeben sei ein Körper mit der Masse m auf einer Feder mit der Federsteifigkeit c. Zu bestimmen ist die Bewegungsgleichung.



Lösung: Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir die Auslenkung x aus dem ungespannten Zustand der Feder. Die kinetische Energie ist gleich $K = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, die potentielle Energie der Feder ist $U = \frac{cx^2}{2}$. Die Lagrangefunktion ist gleich $L = K - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2}$.

Die Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = m\dot{x},$$

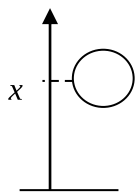
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{cx^2}{2}\right) = -cx.$$

Die Lagrangegleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + cx = 0}.$$ (Das 2. N.G.)

Beispiel 2. Bewegung im Schwerefeld.



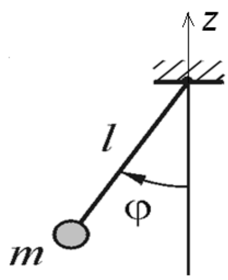
$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \; U = mgx,$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \; \frac{\partial L}{\partial x} = -mg \;\; \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + mg = 0}.$$

Beispiel 3. Bestimmen Sie für ein Pendel:
(1) Lagrange-Funktion,
(2) Bewegungsgleichung.

Lösung:



$$K = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2$$

$$U = mgz = -mgl\cos\varphi$$

Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi:$$

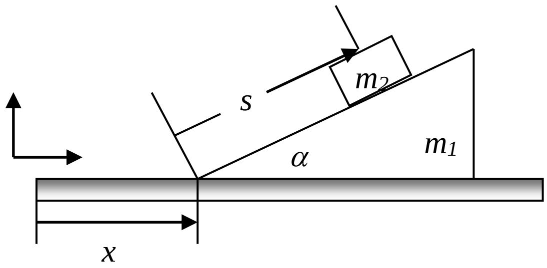
Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}, \; \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Bewegungsgleichung: $\boxed{ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi}$.

Dies ist der Drallsatz für das Pendel.

Beispiel 4. Gegeben sei das auf dem Bild skizzierte System. Der Körper m_2 auf dem Keil und der Keil auf der horizontalen Ebene gleiten ohne Reibung. Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichungen in passend gewählten generalisierten Koordinaten.



Lösung: Die Koordinate der vorderen Kante des Keils und des Abstandes der Masse m_2 von dieser Kante beschreiben eindeutig die Lage des gesamten Systems und können daher als verallgemeinerte Koordinaten gewählt werden. Zur Bestimmung der kinetischen Energien beider Körper drücken wir zunächst die kartesischen Koordinaten von jedem Körper durch die gewählten verallgemeinerten Koordinaten aus:

$x_1 = x$, $\quad y_1 = 0$

$x_2 = x + s\cos\alpha$, $\quad y_2 = s\sin\alpha$.

$$K_1 = \frac{m_1\dot{x}^2}{2},$$

$$K_2 = \frac{m_2}{2}\left[\left(\dot{x}+\dot{s}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dot{s}\sin\alpha\right)^2\right] =$$

$$\frac{m_2}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha\right]$$

$U_1 = konst$, $U_2 = m_2 g y_2 = m_2 g s \sin\alpha$.

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{(m_1+m_2)\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\dot{s}^2}{2} + m_2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha - m_2 g s\sin\alpha$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2\dot{s}\cos\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m_2\dot{s} + m_2\dot{x}\cos\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial s} = -m_2 g\sin\alpha .$$

Lagrangesche Gleichungen:

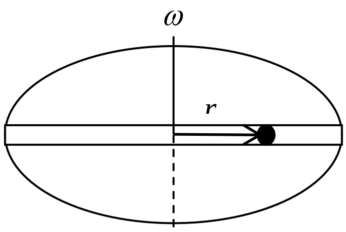
$$(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\ddot{s}\cos\alpha = 0,$$

$$m_2\ddot{s} + m_2\ddot{x}\cos\alpha + m_2 g\sin\alpha = 0 .$$

Daraus können beide Beschleunigungen bestimmt werden. Falls, z.B., nach $\ddot{x}$ gefragt wird, multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\cos\alpha$ und ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab. Daraus folgt

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{m_2 g\sin\alpha\cos\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}}.$$

Beispiel 5. Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichungen für den Körper im Führungskanal auf einer sich drehenden Scheibe (Rotationsachse senkrecht zur Scheibe, Winkelgeschwindigkeit ω).



Lösung: Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir den Abstand r des Körpers von der Rotationsachse. Lagrangesche Funktion: $L = K = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right)$ (die potentielle Energie fällt heraus, da sie konstant ist).

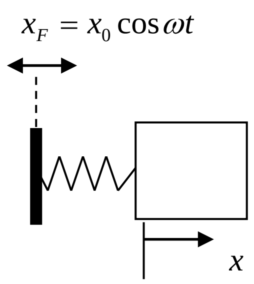
Partielle Ableitungen: $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2$.

Lagrange-Gleichung: $\boxed{m\ddot{r} = mr\omega^2}$.

Man kann leicht die Bewegungsgleichung in einem nicht inertialen (rotierenden) System erkennen: $mr\omega^2$ ist nichts anderes als die Zentrifugalkraft.

Beispiel 6. Fußpunkterregung eines Schwingers. Zu bestimmen ist die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung.

Lösung: x sei die Dehnung der Feder aus dem ungespannten Zustand.



Die x_1-Koordinate der Masse ist dann $x_1 = x_0\cos\omega t + x$. Die Geschwindigkeit der Masse ist $\dot{x}_1 = -x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}$. Die kinetische Energie ist $K = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} = \frac{m\left(-x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}\right)^2}{2}$, die potentielle Energie ist $U = \frac{cx^2}{2}$. Die Lagrange-Funktion: $L = \frac{m\left(-x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}\right)^2}{2} - \frac{cx^2}{2}$.

Ableitungen: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left(-x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}\right)$,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -cx .$$

Lagrangegleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\left(-x_0\omega^2\cos\omega t + \ddot{x}\right) + cx = 0}.$$

$m\ddot{x} + cx = mx_0\omega^2\cos\omega t$ - N.G. für einen Schwinger mit Fußpunkterregung.